

МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА

МАТУРСКИ РАД

из предмета Физика

Хармонијске осцилације електричних кола

Ученик

Павле Стипсић, 4ц

Ментор

проф. Драгица Ивковић

Београд, мај 2015

Садржај

Увод у хармонијске осцилације.....	3
Хармонијске осцилације у затвореном RLC кругу без струјног извора.....	4
Хармонијске осцилације у затвореном RLC кругу са струјним извором.....	16
Осцилаторна кола са позитивном повратном спрегом.....	21
Квантовање линијског хармонијског осцилатора са позитивном повратном спрегом...27	
Ослобађање енергије у виду електромагнетног зрачења.....	34
Закључак.....	36
Прилози.....	37
Литература.....	39

Увод у хармонијске осцилације

Осцилаторна кретања су честа појава у природи. Спадају у групу периодичних кретања, јер се оно понавља на исти начин после одређеног временског периода. Примери из свакодневног живота су смена дана и ноћи, кретање казаљки на часовнику, померање клатна, или откуцавање метронома. У космосу би то представљало кретање планета око звезда, а у микро свету, ротација електрона око своје осе, као и његово кретање дуж атомских орбитала.

Линијско осциловање је вид осцилаторног кретања у ком се осцилатор, то јест тело које осцилује креће дуж праве линије, док придев хармонијски означава да се његово кретање у зависности простор-време може описати графиком синусне функције.

Најједноставнији пример линијског хармонијског осцилатора било би тело окачено о истегљиву опругу, које је изведено из положаја равнотеже и које тежи да се врати у тај положај непрестано крећући се горе-доле око тог положаја дуж вертикалног правца. Овакав начин кретања последица је закона о одржању енергије. Када осцилатору предамо неку енергију, он жели да је равномерно распореди на своју потенцијалну енергију опруге и кинетичку енергију кретања. Како је потенцијална енергија функција положаја, а кинетичка енергија функција брзине, ове две величине се могу изједначити само у случају када су обе једнаке нули, тако да у колико немамо тело које ће ту енергију преузети од осцилатора, помоћу статичког трења, отпора средине, сударом, или на неки други начин, осцилатор се никада неће зауставити.

Међутим, осцилаторно кретање може бити последица деловања и неких других сила, које нису еластичне силе опруге. То могу бити и електростатичке и магнетне силе. Пример за то су осцилаторна кретања наелектрисања унутар проводника. Изазвана су разменом енергија електричног поља унутар и магнетног поља око проводника. Сваки материјал испољава, између осталих, три карактеристике: електрични отпор, капацитет и самоиндукцију. У циљу истицања овог ефекта у осцилаторно струјно коло стављају се представници капацитета-кондензатори, и самоиндукције-индуктори, односно калемови. Да би одржавање осцилаторног кретања било што једноставније термогени отпор се своди на минимум како не би претварао енергију осцилатора у топлоту и одавао је околини.

Као и код механичког осцилатора, потенцијална енергија је функција наелектрисања које мирује у кондензатору, а кинетичка је енергија магнетног поља индукованог у калему од стране наелектрисања које се креће кроз њега, односно зависи од јачине струје. Осцилаторна кола се називају RLC кола или RLC кругови, а назив су добила по ознакама за термогени отпор R , коеф. самоиндукције калема L и капацитет кондензатора C .

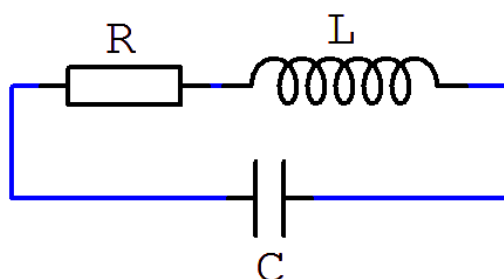
Хармонијске осцилације у затвореном RLC кругу без струјног извора

Унутар затвореног RLC круга могуће је побудити осцилације давањем почетног напона на кондензатору или почетне струје кроз калем. У зависности од почетних услова, систем располаже одређеном енергијом коју ће постепено ослобађати у виду топлоте на термогеном отпору R, са изузетком слободних осцилација када је отпор средине једнак нули.

Параметри којима се описује електрично осцилаторно коло и електричне осцилације су аналогни параметрима механичког осцилатора и механичких осцилација.

Електрични осцилатор		Механички осцилатор	
коэф. самоиндукције	L [H]	маса осцилатора	m [kg]
реципрочна вредност капацитета	$\frac{1}{C}$ [F ⁻¹]	коэф. еластичности	k [$\frac{N}{m}$]
термогени отпор	R [Ω]	отпор средине	δ [$\frac{kg}{s}$]
количина наелектрисања	q [C]	амплитуда	x [m]
јачина струје	I [A]	брзина	v [$\frac{m}{s}$]
први извод струје по времену	$\frac{dI}{dt}$ [$\frac{A}{s}$]	убрзање	a [$\frac{m}{s^2}$]
кружна фрек.	ω [s ⁻¹]	кружна фрек.	ω [s ⁻¹]
пригушење	β [s ⁻¹]	пригушење	β [s ⁻¹]
напон PN споја	d [V]	статичко трење	F [N]

У складу са тим, у зависности од отпора можемо разликовати два уопштена и два специјална случаја осциловања у RLC кругу. Два општа случаја су пригушене осцилације и непериодично пражњење кондензатора, тзв. апериодично избијање, а два специјална су слободне осцилације и пражњење кондензатора на граници осциловања.



Електрична шема осцилаторног кола

$$q''(t)L + q'(t)R + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$q(t) = ae^{kt}$$

$$ak^2e^{kt}L + ake^{kt}R + \frac{ae^{kt}}{C} = 0$$

$$k^2L + kR + \frac{1}{C} = 0$$

$$k = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

У случају великог отпора средине експоненти решења диференцијалне једначине ће бити реални па неће настати осцилације.

$$\omega = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}; \omega \in R$$

$$q(t) = (a_1e^{\omega t} + a_2e^{-\omega t})e^{-\beta t}$$

$$q(t) = e^{-\beta t}((a_1 + a_2) \cosh(\omega t) + (a_1 - a_2) \sinh(\omega t))$$

$$q(0) = q_0 \Rightarrow a_1 + a_2 = q_0$$

$$q'(t) = e^{-\beta t}(-\beta q_0 \cosh(\omega t) - \beta(a_1 - a_2) \sinh(\omega t) + \omega q_0 \sinh(\omega t) + \omega(a_1 - a_2) \cosh(\omega t))$$

$$q'(0) = 0 \Rightarrow \omega(a_1 - a_2) - \beta q_0 = 0$$

$$(a_1 - a_2) = q_0 \frac{\beta}{\omega}$$

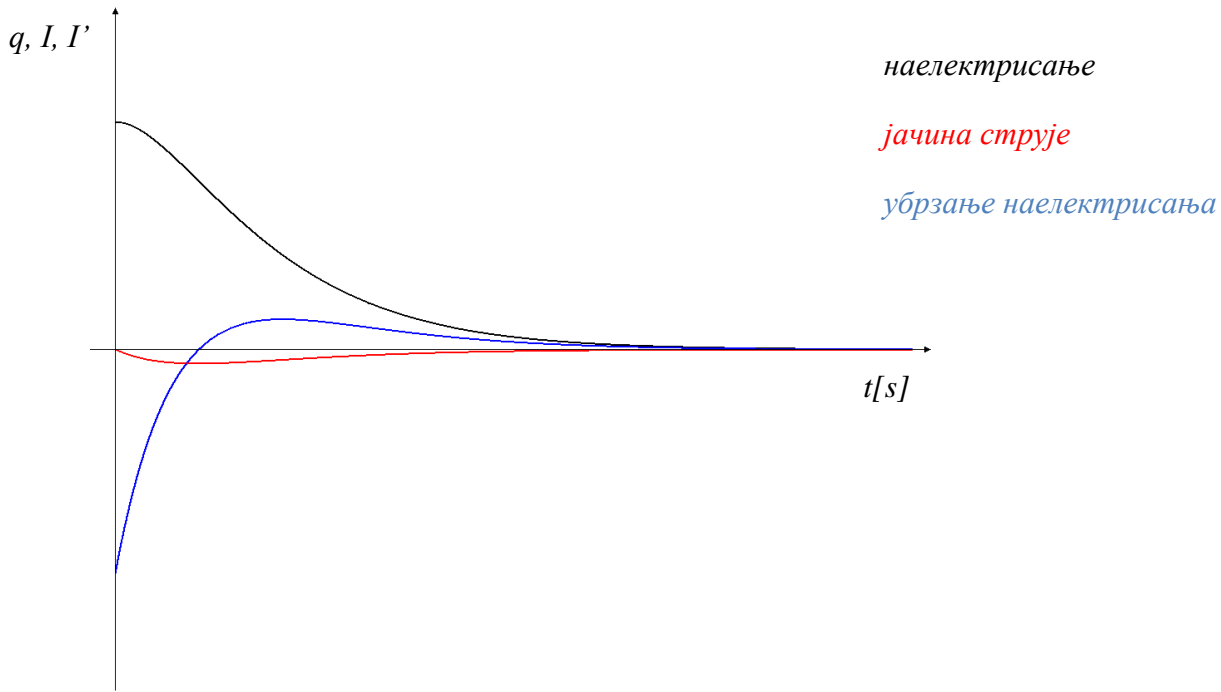
$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \left(\cosh(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sinh(\omega t) \right)$$

$$q'(t) = q_0 e^{-\beta t} \left(\frac{-\beta^2}{\omega} + \omega \right) \sinh(\omega t)$$

$$q'(t) = q_0 e^{-\beta t} \frac{\omega^2 - \beta^2}{\omega} \sinh(\omega t)$$

$$q''(t) = q_0 e^{-\beta t} \left(-\beta \frac{\omega^2 - \beta^2}{\omega} \sinh(\omega t) + \omega \frac{\omega^2 - \beta^2}{\omega} \cosh(\omega t) \right)$$

$$q''(t) = q_0 e^{-\beta t} (\omega^2 - \beta^2) \left(\cosh(\omega t) - \frac{\beta}{\omega} \sinh(\omega t) \right)$$



наелектрисање

јачина струје

убрзање наелектрисања

Непериодично пражњење кондензатора

У случају малог отпора средине, експоненти решења диференцијалне једначине ће бити комплексни и јавиће се пригушене осцилације током пражњења кондензатора.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} i; \omega \in \mathbb{C}$$

$$q(t) = (a_1 e^{\omega t i} + a_2 e^{-\omega t i}) e^{-\beta t}$$

$$q(t) = e^{-\beta t} ((a_1 + a_2) \cos(\omega t) + (a_1 - a_2) i \sin(\omega t))$$

$$q(0) = q_0 \Rightarrow a_1 + a_2 = q_0$$

$$q'(t) = e^{-\beta t} (-\beta q_0 \cos(\omega t) - \beta(a_1 - a_2) i \sin(\omega t) - \omega q_0 \sin(\omega t) + \omega(a_1 - a_2) i \cos(\omega t))$$

$$q'(0) = 0 \Rightarrow \omega(a_1 - a_2) i - \beta q_0 = 0$$

$$(a_1 - a_2) i = q_0 \frac{\beta}{\omega}$$

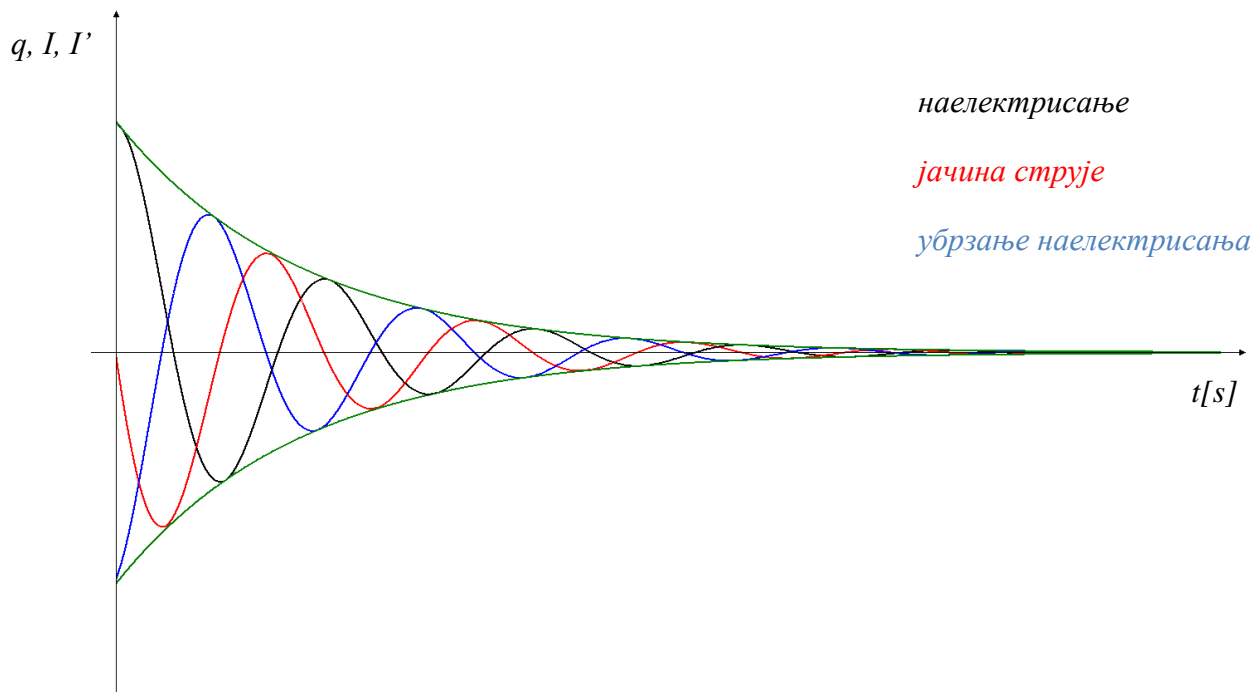
$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$q'(t) = q_0 e^{-\beta t} \left(\frac{-\beta^2}{\omega} - \omega \right) \sin(\omega t)$$

$$q'(t) = -q_0 e^{-\beta t} \frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$q''(t) = -q_0 e^{-\beta t} \left(-\beta \frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega} \sin(\omega t) + \omega \frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega} \cos(\omega t) \right)$$

$$q''(t) = -q_0 e^{-\beta t} (\omega^2 + \beta^2) \left(\cos(\omega t) - \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$



Пригушене осцилације

Када дискриминанта решења тежи нули период осциловања тежи бесконачности, а само пражњење није ни периодично ни неперидично. Закон пражњења се добија из граничне вредности.

$$\omega = 0$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \frac{1}{LC} + 0_-} \left(\cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2} t \right) + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2}} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2} t \right) \right) =$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \frac{1}{LC} + 0_+} \left(\cosh \left(\sqrt{\beta^2 - \frac{1}{LC}} t \right) + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \frac{1}{LC}}} \sinh \left(\sqrt{\beta^2 - \frac{1}{LC}} t \right) \right) = 1 + \beta t$$

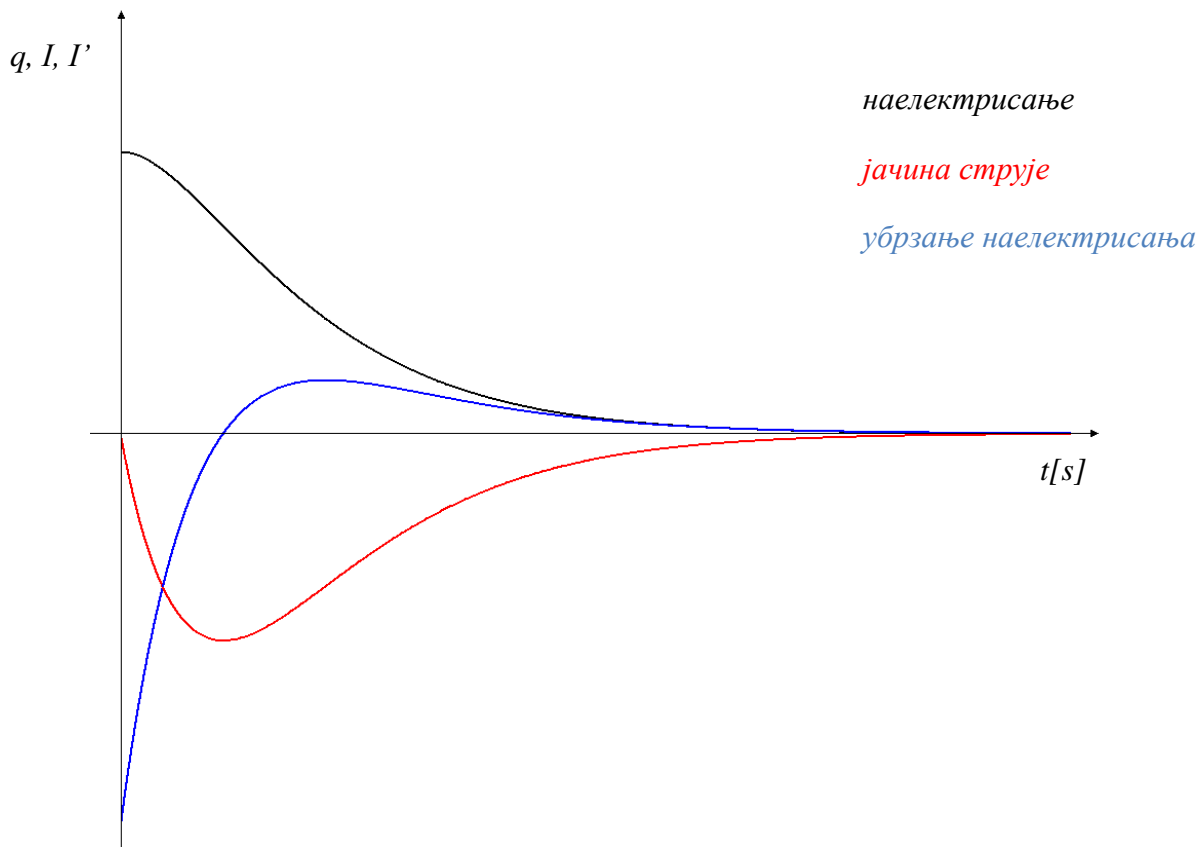
$$q(t) = q_0(\beta t + 1)e^{-\beta t}$$

$$q'(t) = q_0(-\beta^2 t + \beta - \beta)e^{-\beta t}$$

$$q'(t) = -q_0 e^{-\beta t} \beta^2 t$$

$$q''(t) = q_0 e^{-\beta t} (\beta^3 t - \beta^2)$$

$$q''(t) = q_0 e^{-\beta t} \beta^2 (\beta t - 1)$$



Гранични случај пражњења кондензатора

У колико је отпор средине једнак нули, долази до слободних осцилација, тј. пригушење је једнако нули.

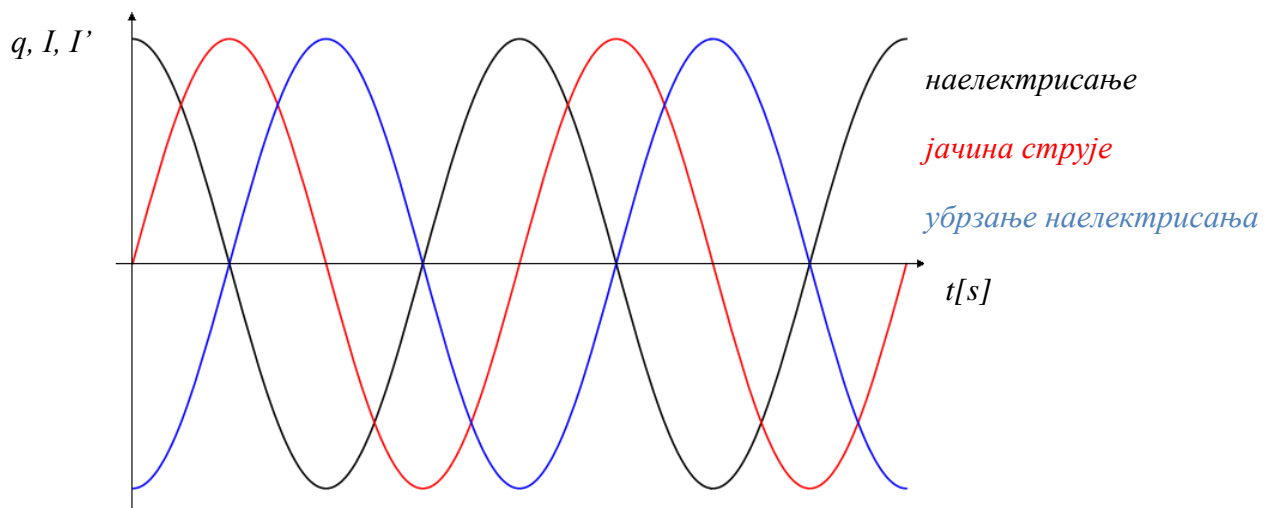
$$\beta = 0; \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t)$$

$$q'(t) = -q_0 \omega \sin(\omega t)$$

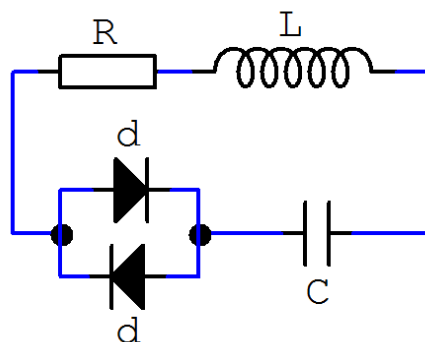
$$q''(t) = -q_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

У овом случају фазни померај струје и напона на кондензатору је тачно $\frac{\pi}{2}$.



Слободне осцилације

У колико се у RLC коло редно вежу две антипаралелно спојене диоде чији је напон PN споја d , може се изазвати ефекат померања равнотежног положаја у вредности тог напона. Исти ефекат постиже сила трења приликом механичких осцилација. На тај начин се на диодама генерише дигитални сигнал.



Електрична шема осцилаторног кола са диодама

Ако је термогени отпор у колу занемарљив, амплитуда осцилација ће се каскадно мењати по времену, а кружна фреквенција остаје непромењена.

$$q''(t)L + d \cdot \text{sgn}(q'(t)) + \frac{q(t)}{C} = 0; \quad q(0) = q_0;$$

$$q(t) = e^{kt} - dC \cdot \text{sgn}(q'(t))$$

$$K^2L + \frac{1}{C} = 0 \quad K = \pm \sqrt{\frac{1}{LC}} i$$

$$q(t) = (C_1 + C_2) \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right) + (C_1 - C_2)i \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right) - dC \text{sgn}(q'(t))$$

$$q'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2$$

$$C_1 + C_2 = q_0 - dC \left(1 + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \operatorname{div} \pi\right)\right) \quad C_1 + C_2 \geq 0$$

$$q_0 - dC \left(1 + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \operatorname{div} \pi\right)\right) \geq 0$$

$$ndC + q_0 \operatorname{mod} dC = q_0 \quad \Rightarrow \quad n = q_0 \operatorname{div} dC$$

$$q_0 - dC \left(1 + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \operatorname{div} \pi\right)\right) \geq q_0 - ndC$$

$$t_{\max} : n + 1 \geq 1 + 2(\omega t \operatorname{div} \pi) \geq \frac{q_0}{dC}$$

$$n \geq 2 \frac{\omega t \operatorname{div} \pi}{\pi}$$

$$q_0 \in R \quad \frac{n\pi}{2} \geq \omega t \operatorname{div} \pi$$

$$q(t) = \text{sgn}(q_0) \left(|q_0| - dC \left(1 + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \operatorname{div} \pi\right)\right) \right) \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sgn} \left(q_0 \left(|q_0| - dC \left(1 + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \operatorname{div} \pi \right) \right) \right) \right) \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) \\
U(t) = & \operatorname{sgn}(q_0) \left(\left| \frac{q_0}{C} \right| - d \left(1 + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \operatorname{div} \pi \right) \right) \right) \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) + \\
& + \operatorname{sgn} \left(q_0 \left(\left| \frac{q_0}{C} \right| - d \left(1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t \operatorname{div} \pi \right) \right) \right) \right) \sin \sqrt{\frac{1}{LC}} t
\end{aligned}$$

Такође у колико пражњењем кондензатора настају осцилације, време осциловања је коначно и наелектрисање које ће се задржати у кондензатору након заустављања је у интервалу од $-dC$ до $+dC$.

$$|q_0| - dC(1 + 2(\omega t \operatorname{div} \pi)) > 0$$

$$\frac{|q_0|}{dC} - (1 + 2(\omega t \operatorname{div} \pi)) > 0$$

$$\frac{|q_0| - dC}{dC} > 2(\omega t \operatorname{div} \pi)$$

$$\frac{|q_0| - dC}{2dC} > \omega t \operatorname{div} \pi$$

$$\frac{|q_0| - dC}{2dC} > (n\pi + \sigma) \operatorname{div} \pi$$

$$\frac{|q_0| - dC}{2dC} > n$$

$$n = \frac{|q_0| - dC}{2dC} \operatorname{div} 1$$

$$\omega t = (n + 1)\pi$$

$$t = \frac{\left(\frac{|q_0| - dC}{2dC} \operatorname{div} 1 \right) + 1}{\omega} \pi$$

$$\frac{|q_0| - dC}{2dC} = n + 1$$

$$t = \frac{|q_0| - dC}{\omega} \pi$$

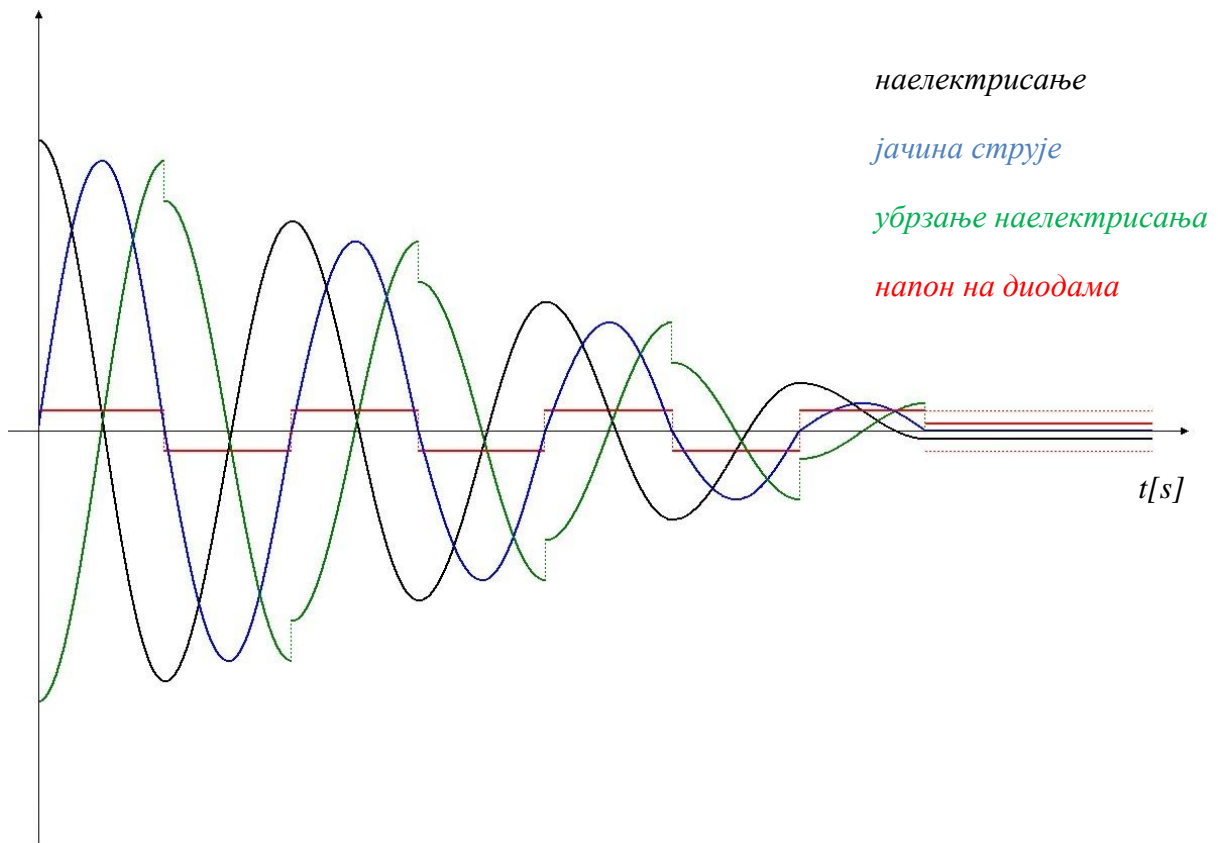
$$t = \begin{cases} \left(\frac{|q_0| - dC}{2dC} \operatorname{div} 1 \right) + 1 \frac{\pi}{\omega}; & n > \frac{|q_0| - dC}{2dC} \quad \frac{|q_0| - dC}{2dC} \operatorname{mod} 1 > 0 \\ \frac{|q_0| - dC}{2dC\omega} \pi; & n + 1 = \frac{|q_0| - dC}{2dC} \quad \frac{|q_0| - dC}{2dC} \operatorname{mod} 1 = 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{\frac{|q_0| - dC}{2dC} \operatorname{div} 1 + 1 - \delta_{\frac{|q_0| - dC}{2dC} \operatorname{mod} 1, 0}}{\omega} \pi$$

$$q'(t) = -\operatorname{sgn}(q_0)(|q_0| - dC(1 + 2 \omega t \operatorname{div} \pi)) \sin(\omega t) \omega$$

$$q''(t) = -\operatorname{sgn}(q_0)(|q_0| - dC(1 + 2 \omega t \operatorname{div} \pi)) \cos(\omega t) \omega^2$$

q, I, I', U



Слободне осцилације са диодама

Ако термогени отпор у колу није занемарљив, амплитуда ће се мењати и експоненцијално и каскадно и време осциловања ће бити додатно скраћено под дејством пригушења.

$$q''(t)L + q'(t)R + \frac{q(t)}{C} + \text{sgn}(q'(t))d = 0$$

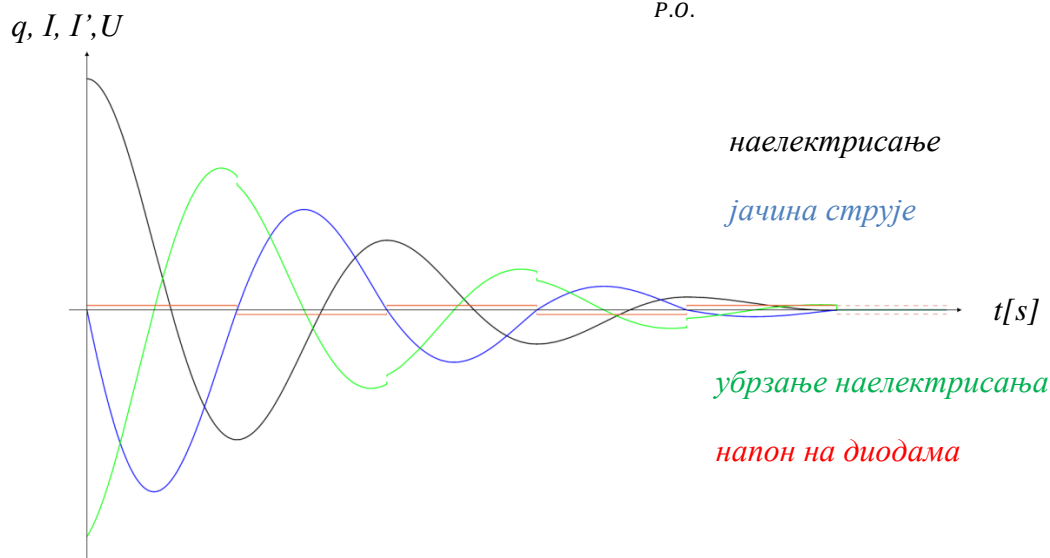
$$q(t) = A(t) \cdot \underbrace{\left(\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) + \frac{\beta}{\omega} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) \right)}_{P.O.} + dC \text{sgn}\left(A(t) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right)\right)$$

$$A(t) = \text{sgn}(q_0) \underbrace{\left(\left((|q_0| - dC) e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}} - 2dC \right) e^{-\frac{\beta\pi}{\omega}} - 2dC \right) \dots }_{\omega t \text{ div } \pi} e^{-\beta\Delta t}$$

$$\Delta t = \frac{\omega t \bmod \pi}{\omega}$$

$$q'(t) = -A(t) \cdot \underbrace{\frac{\omega_0^2}{\omega} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right)}_{P.O.}$$

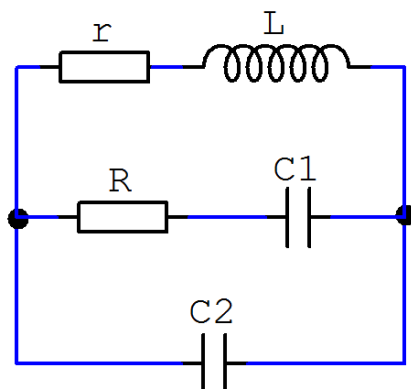
$$q''(t) = -A(t) \cdot \underbrace{\omega_0^2 \left(\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) - \frac{\beta}{\omega} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) \right)}_{P.O.}$$



Пригушене осцилације са диодама

У случају када је термогени отпор у колу толико велики да се не могу јавити осцилације у колу, кондензатор неће престати да се празни у коначном времену и напон ће се асимптотски приближавати напону PN споја на диодама.

Када се унутар струјног кола направи гранање прстена, долази до стварања више фреквенција пражњења кондензатора и слагања осцилација.



Електрична шема разгранатог осцилаторног кола

$$q''(t)L + q'(t)r + q_1'(t)R + \frac{q_1(t)}{C_1} = 0$$

$$q''(t)L + q'(t)r + \frac{q(t) - q_1(t)}{C_2} = 0$$

$$q_1(t) = C_2 \left(q''(t)L + q'(t)r + \frac{q(t)}{C_2} \right)$$

$$q_1'(t) = C_2 \left(q'''(t)L + q''(t)r + \frac{q'(t)}{C_2} \right)$$

$$q'''(t)LC_2 + q''(t) \left(L \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) + C_2 R r \right) + q'(t) \left(R + r \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \right) + \frac{q(t)}{C_1} = 0$$

$$k^3 LC_2 + k^2 \left(L \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) + C_2 R r \right) + k \left(R + r \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \right) + \frac{1}{C_1} = 0$$

$$A(k - k_1)(k - k_2)(k - k_3) = 0 \quad A \neq 0$$

$$q(t) = \lambda_1 e^{k_1 t} + \lambda_2 e^{k_2 t} + \lambda_3 e^{k_3 t}$$

$$k_1 \in \mathbb{R}^- \Rightarrow k_1 = -\gamma$$

$$k_2 = -\beta + \omega$$

$$k_3 = -\beta - \omega$$

$$q(t) = \lambda_1 e^{-\gamma t} + e^{-\beta t} \left((\lambda_2 + \lambda_3) \cosh(\omega t) + (\lambda_2 - \lambda_3) \sinh(\omega t) \right)$$

$$q'(t) = -(\lambda_1 \gamma e^{-\gamma t} + \lambda_2 (\beta + \omega) e^{-(\beta + \omega)t} + \lambda_3 (\beta - \omega) e^{-(\beta - \omega)t})$$

$$q_1(t) = \lambda_1(\gamma^2 LC_2 - \gamma r C_2 + 1)e^{-\gamma t} + \lambda_2((\beta + \omega)^2 LC_2 - (\beta + \omega)r C_2 + 1)e^{-(\beta + \omega)t} + \\ + \lambda_3((\beta - \omega)^2 LC_2 - (\beta - \omega)r C_2 + 1)e^{-(\beta - \omega)t}$$

$$q(0) = q_0$$

$$q'(0) = 0$$

$$q_1(0) = q_{10}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = q_0$$

$$\lambda_1 \gamma + \lambda_2(\beta + \omega) + \lambda_3(\beta - \omega) = 0$$

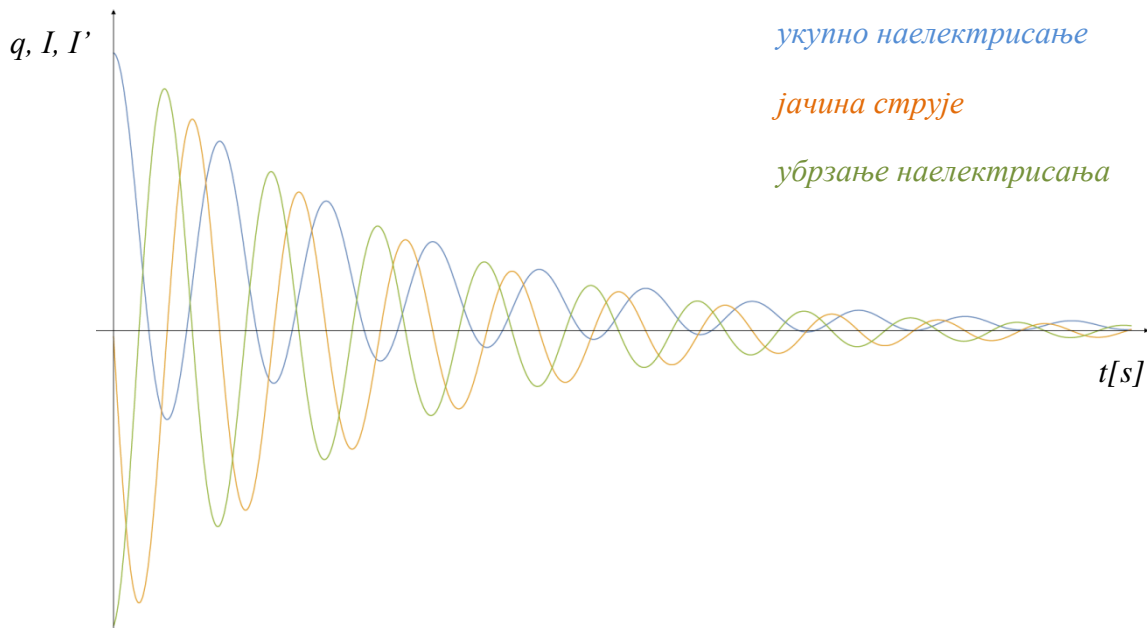
$$\lambda_1(\gamma^2 LC_2 - \gamma r C_2 + 1) + \lambda_2((\beta + \omega)^2 LC_2 - (\beta + \omega)r C_2 + 1) + \\ + \lambda_3((\beta - \omega)^2 LC_2 - (\beta - \omega)r C_2 + 1) = q_{10}$$

$$\lambda_1 = q_0 - (\lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_3(\omega + \gamma - \beta) - q_0 \gamma}{\beta + \omega - \gamma}$$

λ_3

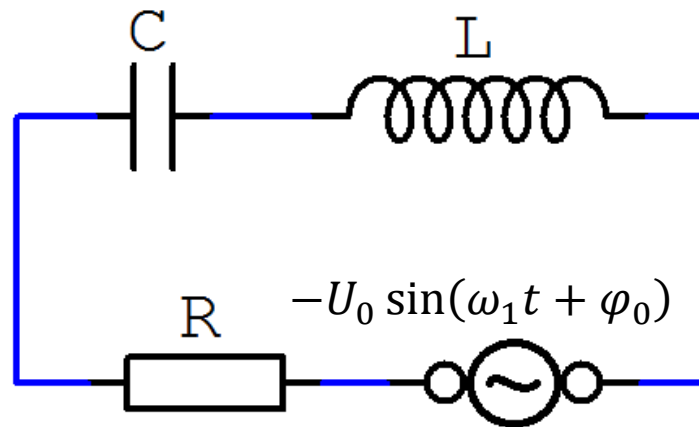
$$= \frac{q_{10} - \left(\frac{q_0 \gamma}{\beta + \omega - \gamma} + q_0\right)(\gamma^2 LC_2 - \gamma r C_2 + 1) + \frac{q_0 \gamma}{\beta + \omega - \gamma}((\beta + \omega)^2 LC_2 - (\beta + \omega)r C_2 + 1)}{\frac{2\omega}{\beta + \omega - \gamma}((\gamma^2 - (\beta + \omega)^2)LC_2 + (\beta + \omega - \gamma)r C_2) + ((\beta - \omega)^2 LC_2 - (\beta - \omega)r C_2 + 1)}$$



Слагање осцилација у разгранатом осцилаторном колу

Хармонијске осцилације у затвореном RLC кругу са струјним извором

У циљу одржавања амплитуде осцилација реалних осцилаторних кола која имају термогени отпор већи од нуле, унутар RLC круга се везују струјни извори. У колико је струјни извор извор једносмерне струје, почетна амплитуда постаје једнака напону самог извора, а осциловање је опет пригушено или непериодично, само овог пута уместо око нуле, наелектрисање осцилује око потенцијала струјног извора, а све остало остаје непромењено. Међутим, ако се у коло стави струјни извор синусне наизменичне струје јавиће се осцилације чија ће се амплитуда асимптотски приближавати некој коначној вредности, тзв. принудне осцилације.



Електрична шема кола са синусним извором струје

$$q''(t)L + q'(t)R + \frac{q(t)}{C} = U_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$q(0) = 0 \quad q'(0) = 0 \quad q(t) = q_n(t) + q_p(t)$$

Оваква диференцијална једначина има два типа решења. Један тип представља пригушене осцилације или непериодична кретања која настају као последица прилагођавања струјног кола новонасталим условима које описује други, стационарни тип решења, и представља мост између старог и новог стања.

$$q_n(t) = U_0(C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + C_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_0))$$

$$\begin{aligned} & -U_0(C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + C_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_0)) L \omega_1^2 + U_0 \omega_1 R (-C_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + \\ & + C_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_0)) + \frac{U_0}{C} (C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + C_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_0)) = \\ & = U_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\left(-C_2 L\omega_1^2 - C_1\omega_1 R + \frac{C_2}{C} - 1\right) \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$= \left(C_1 L\omega_1^2 - C_2\omega_1 R - \frac{C_1}{C}\right) \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

$$C_2 LC\omega_1^2 - C_1\omega_1 R + C - C_2 = 0$$

$$-C_1 L\omega_1^2 C + C_2 C\omega_1 R + C_1 = 0$$

$$C_2(LC\omega_1^2 - 1) + C_1 C\omega_1 R + C = 0$$

$$C_1(1 - LC\omega_1^2) + C_2\omega_1 RC = 0$$

$$C_2 = \frac{C_1(LC\omega_1^2 - 1)}{\omega_1 RC}$$

$$C_1 \frac{L^2 C^2 \omega_1^4 + 1 + C^2 \omega_1^2 R^2 - 2LC\omega_1^2}{\omega_1 RC} = -C$$

$$C_1 = -\frac{\omega_1 RC^2}{L^2 C^2 \omega_1^4 + 1 + C^2 \omega_1^2 R^2 - 2LC\omega_1^2}$$

$$C_2 = -\frac{LC^2 \omega_1^2 - C}{L^2 C^2 \omega_1^4 + (C^2 R^2 - 2LC)\omega_1^2 + 1}$$

$$q_n(t) = -\frac{U_0 C (\omega_1 RC \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + (LC\omega_1^2 - 1) \sin(\omega_1 t + \varphi_0))}{L^2 C^2 \omega_1^4 + (C^2 R^2 - 2LC)\omega_1^2 + 1}$$

$$q_n(t) =$$

$$U_0 C \left(\frac{\overbrace{\sin \varphi}^{\sin \varphi}}{\omega_1 RC} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{\overbrace{\cos \varphi}^{\cos \varphi}}{(LC\omega_1^2 - 1)} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{L^2 C^2 \omega_1^4 + (C^2 R^2 - 2LC)\omega_1^2 + 1}}$$

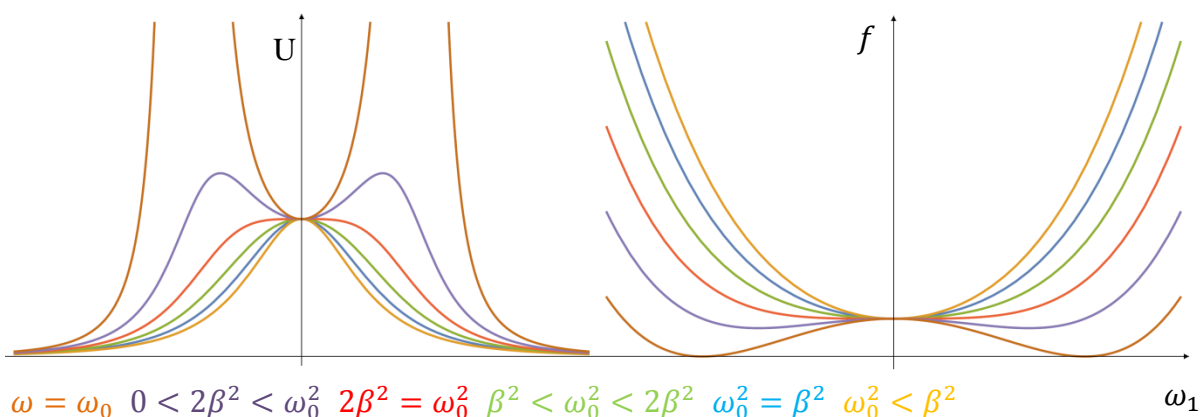
$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega_1 RC}{LC\omega_1^2 - 1}\right)$$

$$q_n(t) = -\frac{\overbrace{U_0 C \sin\left(\omega_1 t + \varphi_0 + \arctg\left(\frac{\omega_1 RC}{LC\omega_1^2 - 1}\right)\right)}^{\in[-1,1]}}{\sqrt{L^2 C^2 \omega_1^4 + (C^2 R^2 - 2LC)\omega_1^2 + 1}}$$

Амплитуда стационарног стања зависи од фреквенције синусног извора струје, и максимална је када је квадратна функција у имениоцу минимална. Та фреквенција се назива резонантном фреквенцијом напона струјног кола.

$$\max(q_n(t)) : \min(f(\omega_1) = L^2 C^2 \omega_1^4 + (C^2 R^2 - 2LC)\omega_1^2 + 1) \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{2LC - C^2 R^2}{2L^2 C^2}$$

$$\omega_1 = \omega_{res} = \begin{cases} 0; & \frac{1}{LC} < \frac{R^2}{2L^2}; \\ \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}; & \frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{2L^2}; \end{cases}$$



Зависност амплитуде од фреквенције синусног извора струје

Због пригушења долази до фазног помераја струје и напона различитог од $\frac{\pi}{2}$, па се резонантна фреквенција струје сада разликује од резонантне фреквенције напона.

$$q'_n(t) = I = - \frac{U_0 \omega_1 C \cos \left(\omega_1 t + \varphi_0 + \arctg \left(\frac{\omega_1 RC}{LC \omega_1^2 - 1} \right) \right)}{\sqrt{L^2 C^2 \omega_1^4 + (C^2 R^2 - 2LC)\omega_1^2 + 1}}$$

$$Z = \frac{U_0}{I}$$

$$Z = \frac{U_0 \sqrt{L^2 C^2 \omega_1^4 - 2LC \omega_1^2 + 1 + R^2 C^2 \omega_1^2}}{U_0 \omega_1 C}$$

$$Z = \sqrt{\frac{L^2 C^2 \omega_1^4}{C^2 \omega_1^2} + \left(\frac{C^2 R^2}{C^2} - \frac{2LC}{C^2} \right) \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^2 C^2}}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right)^2}$$

$$Z_{min} \Rightarrow \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = 0 \quad \omega_1 = \omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Део решења који представља пригушене осцилације има амплитуду A_p одређену почетним условима, тј. почетним фазним померајем φ_0 .

$$q(0) = 0$$

$$q(t) = -U_0 \frac{C^2 L \omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) - C \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + \omega_1 C^2 R \cos(\omega_1 t + \varphi_0)}{C^2 \omega_1^2 (\omega_1^2 L^2 + R^2) - 2\omega_1^2 LC + 1}$$

$$- e^{-\beta t} \left(\underbrace{q_n(0) \cosh(\omega t) + \frac{q'_n(0) + q_n(0)\beta}{\omega} \sinh(\omega t)}_{p.o.} \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$A_p = \sqrt{q_n(0)^2 + \left(\frac{q'_n(0) + q_n(0)\beta}{\omega} \right)^2}$$

$$\frac{(LC\omega_1^2 - 1) \sin(\varphi_0)}{k \cdot \cos(\varphi_p)} + \frac{\omega_1 CR \cos(\varphi_0)}{k \cdot \sin(\varphi_p)}$$

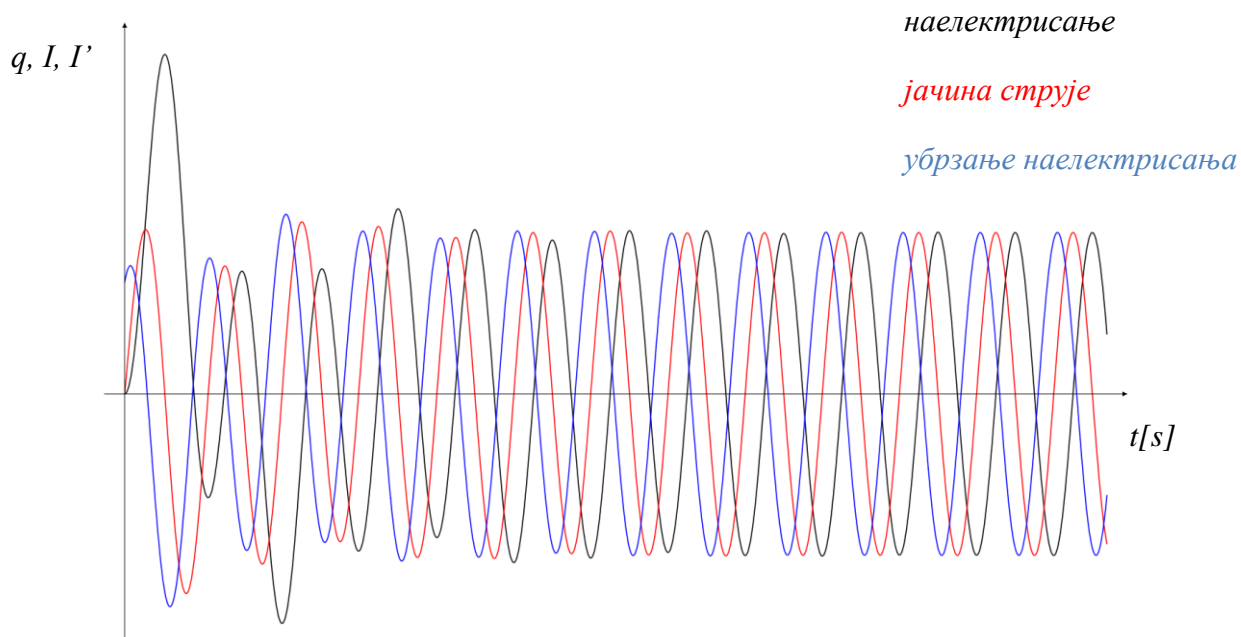
$$\varphi_p = \arctg \left(\frac{\omega_1 CR}{LC\omega_1^2 - 1} \right)$$

$$a(\cos(\varphi_p) \sin(\varphi_0) + \sin(\varphi_p) \cos(\varphi_0)) = q_n(0)$$

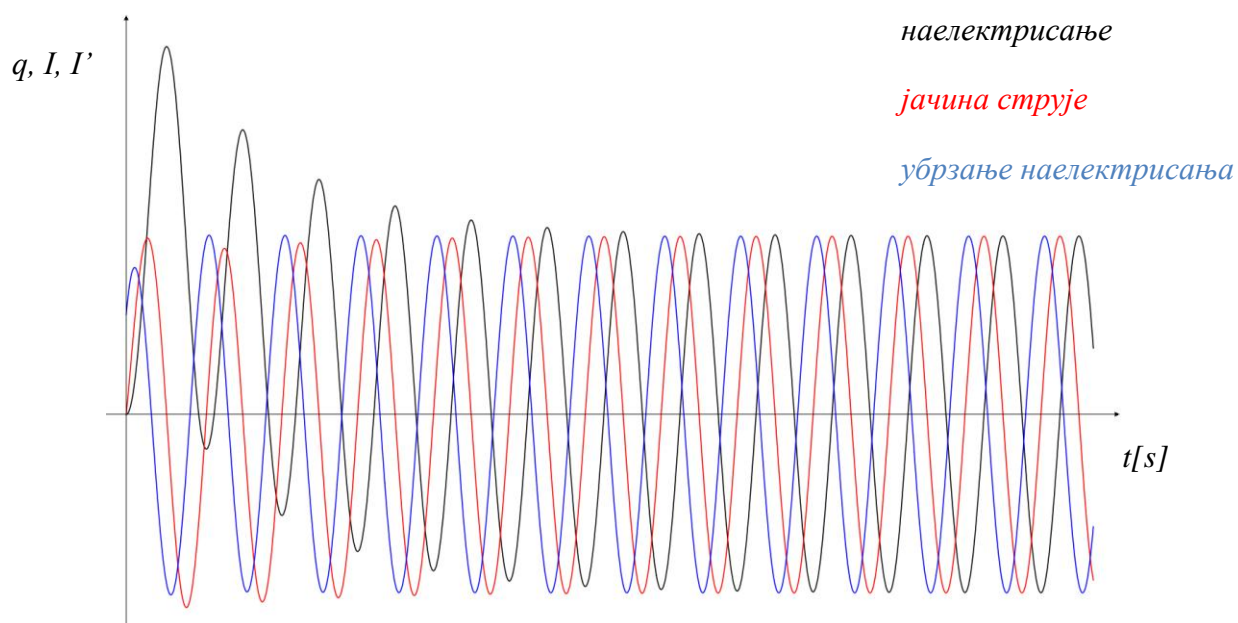
$$a = - \frac{U_0 C}{\sqrt{C^2 \omega_1^2 (\omega_1^2 L^2 + R^2) - 2\omega_1^2 LC + 1}}$$

$$A_p = a \sqrt{\underbrace{\cos^2(\varphi_0 + \varphi_p) + \sin^2(\varphi_0 + \varphi_p)}_1 + 2 \frac{\beta}{\omega} \sin(2\varphi_0 + 2\varphi_p) + \frac{\beta^2}{\omega^2} \sin^2(\varphi_0 + \varphi_p)}$$

$$A_p = a \sqrt{1 + 2 \frac{\beta}{\omega} \sin(2\varphi_0 + 2\varphi_p) + \frac{\beta^2}{\omega^2} \sin^2(\varphi_0 + \varphi_p)}$$



Принудне осцилације са пригушеним осцилацијама



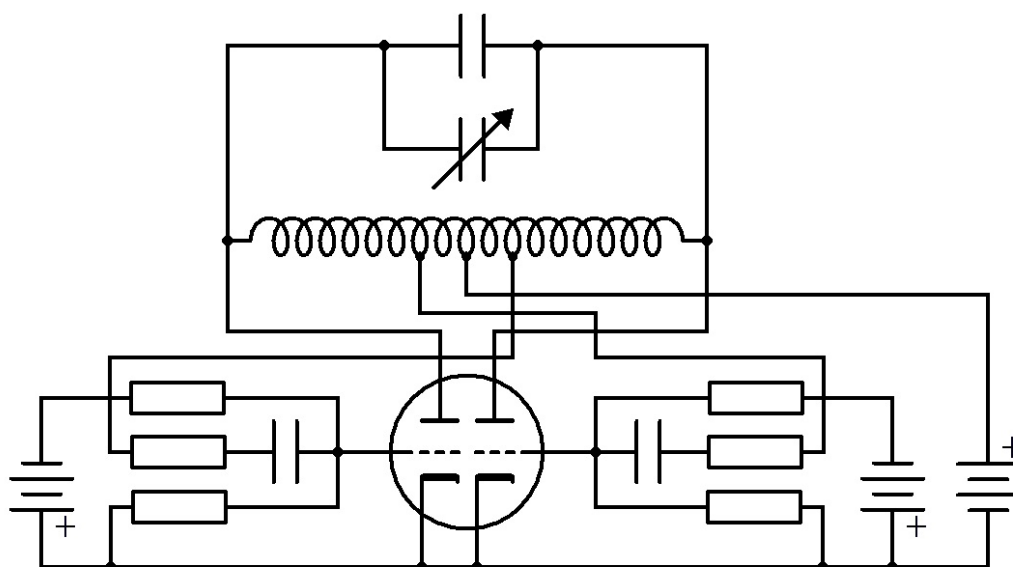
Принудне осцилације са неперидичним прелазом

У колико су у колу са синусним извором струје редно постављене и две антипаралелно везане диоде, струјно коло ће после сваких пола периода започињати ново прилагођавање следећем стању.

Осцилаторна кола са позитивном повратном спрегом

Да би се унутар RLC круга одржале хармонијске осцилације, било је неопходно поставити извор синусне наизменичне струје унутар круга или га поставити паралелно са неким његовим елементима. Међутим, намеће се питање како генерисати наизменичну струју без променљивог извора?

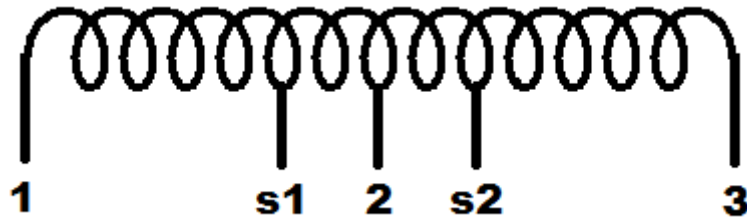
У циљу стварања наизменичног извора струје, колу је потребно додати активан елемент. То може бити електронска цев, транзистор, операциони појачавач, интегрално појачало итд. који ће бити синхронизован са осцилацијама из RLC круга преко повратне везе и који ће истовремено враћати део енергије који се ослободи у виду топлоте на термогеном отпору и тако обезбедити константну амплитуду осцилација.



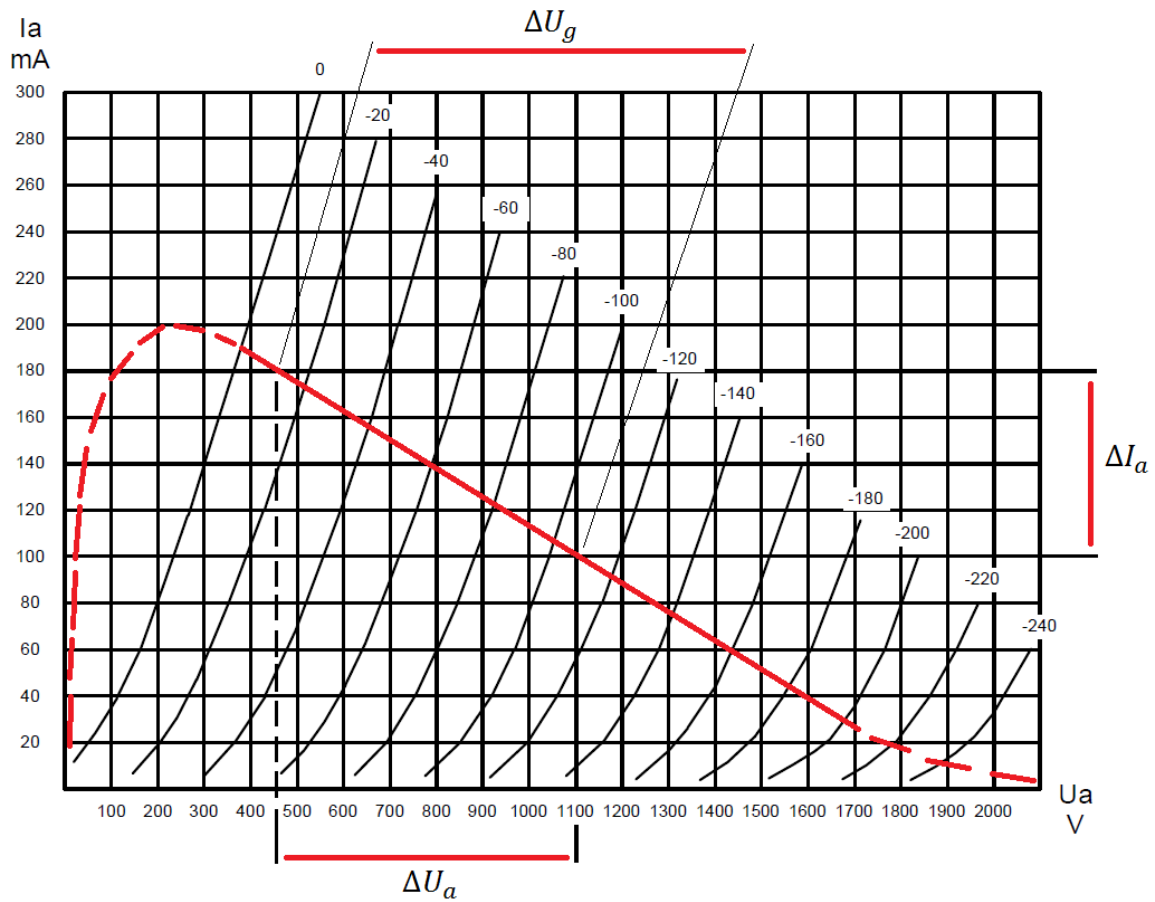
Електрична шема осцилаторног кола са позитивном повратном спрегом

Утицај повратне спреге на фреквенцију осциловања је занемарљив, као и струја која тече кроз њу, тако да је приликом њеног конструисања потребно ставити велики термогени отпор иза кондензатора, који глуми зид, а отпор испред кондензатора сто пута већи од капацитативног отпора самог кондензатора како не би дошло до великог фазног помераја између активног елемента и RLC круга.

Приликом моделовања радне праве, бира се довољан нагиб како би спрам отпора већи део енергије стизао у RLC круг, него што у виду топлоте одлази из њега. Овај нагиб ће дефинисати брзину раста амплитуде, фреквентни померај, као и време проведено у стању лабилне равнотеже пре почетка осцилаторног кретања. То се постиже индиректно одређивањем односа напона у RLC кругу и напона повратне спреге. То је у овом случају однос броја намотаја 1-2 и броја намотаја 2-s2 на калему.



Изводи на калему



Одређивање радне праве активног елемента

$$L_1 = L_2$$

$$\frac{\Delta I_{n1}}{\Delta t} M_2 + \frac{\Delta I_{n2}}{\Delta t} L_2 = U_{2-3}$$

$$\frac{\Delta I_{n2}}{\Delta t} M_1 + \frac{\Delta I_{n1}}{\Delta t} L_1 = U_{1-2}$$

$$L_1 \cdot I'_{n1} = M_2 \cdot I'_{n1} \Rightarrow L_1 = M_1 = L_2 = M_2 = \frac{L}{4}$$

$$I'_{n1} = I'_1 + I'_p$$

$$I'_{n2} = I'_p - I'_2$$

$$U_{R1-3} = (I_2 - I_1 + 2I_p) \frac{r}{2}$$

$$U_{R1-2} = (I_p - I_1) \frac{r}{2}$$

$$U_{R2-3} = (I_p + I_2) \frac{r}{2}$$

$$U_{L1-2} = -(I'_2 M_1 - I'_1 L_1 - I'_p M_1 - I'_p L_1)$$

$$U_{L2-3} = I'_1 M_2 + I'_p M_2 - I'_2 L_2 + I'_p L_2$$

$$U_{L1-2} = -((I'_2 - I'_p)M_1 - (I'_1 + I'_p)L_1)$$

$$U_{L2-3} = (I'_1 + I'_p)M_2 + (I'_p - I'_2)L_2$$

$$U_{L1-3} = \frac{L}{2}(2I'_p + I'_1 - I'_2)$$

$$U_{g1} = \varepsilon_g + \frac{1}{K_l} \frac{r}{2}(I_2 + I_p - I_0) + \frac{1}{K_l} \frac{L}{4}(2I'_p + I'_1 - I'_2)$$

$$U_{g2} = \varepsilon_g + \frac{1}{K_l} \frac{r}{2}(I_1 - I_p - I_0) - \frac{1}{K_l} \frac{L}{4}(2I'_p + I'_1 - I'_2)$$

$$U_A = K_l U_g + n \Rightarrow \frac{\Delta U_A}{\Delta U_g} = K_l = \frac{N_{1-3}}{2N_{2-s2}} = \frac{N_{1-3}}{2N_{s1-2}}$$

$$K_i = \frac{\Delta I_A}{\Delta U_A}; \quad I_1 = I_0 - i_1; \quad I_2 = I_0 + i_2$$

$$0 \quad \varepsilon = n + K_l \varepsilon_g + \frac{r}{2} I_0$$

$$I \quad \varepsilon = U_{A1} + \frac{r}{2}(I_0 - i_1 - I_p) + \frac{L}{4}(i'_1 + i'_2 - 2I'_p)$$

$$II \quad \varepsilon = U_{A2} + \frac{r}{2}(I_0 + i_2 + I_p) - \frac{L}{4}(i'_1 + i'_2 - 2I'_p)$$

$$U_{A1} = n + K_l \varepsilon_g + \frac{r}{2}(i_2 + I_p) - \frac{L}{4}(i'_1 + i'_2 - 2I'_p)$$

$$U_{A2} = n + K_l \varepsilon_g - \frac{r}{2}(i_1 + I_p) + \frac{L}{4}(i'_1 + i'_2 - 2I'_p)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = n + K_l \varepsilon_g + \frac{r}{2}(I_0 - i_1 + i_2) \\ \varepsilon = n + K_l \varepsilon_g + \frac{r}{2}(I_0 + i_2 - i_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon + \frac{r}{2}(i_2 - i_1); \quad 0 = i_2 - i_1; \quad i_1 = i_2 = 0$$

$$x + \frac{i}{|K_i|} + \frac{I_0}{|K_i|} = n + K_l \varepsilon_g - \frac{r}{2}(i + I_p) + \frac{L}{2}(i' - I'_p)$$

$$\frac{I_0}{|K_i|} + x = \varepsilon - \frac{r}{2}I_0 = U_{A0} = n + K_l \varepsilon_g$$

$$\frac{i}{|K_i|} = -\frac{r}{2}(i + I_p) + \frac{L}{2}(i' - I_p')$$

$$III \quad \frac{1}{C} \int_0^t I_p dt + r(i + I_p) + L(I_p' - i') = 0$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t I_p dt = \frac{2}{|K_i|} i$$

$$i = |K_i| \frac{\int_0^t I_p dt}{2C}$$

$$i' = \frac{|K_i| I_p}{2C}$$

$$\int_0^t I_p dt \left(\frac{2 + |K_i| r}{2C} \right) + I_p \left(\frac{2Cr - L|K_i|}{2C} \right) + LI_p' = 0$$

$$\frac{2 + r|K_i|}{2C} + K \frac{2Cr - L|K_i|}{2C} + K^2 L = 0$$

$$K = \underbrace{-\frac{2Cr - L|K_i|}{4CL}}_{\substack{\hat{=} \\ 0 \\ (K_i < 0)}} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{2Cr - L|K_i|}{4LC} \right)^2}_{\hat{=} \\ 0} - \frac{2 + r|K_i|}{2LC}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 + r|K_i|}{2LC} - \left(\frac{L|K_i| - 2Cr}{4LC} \right)^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2} + \frac{3r|K_i|}{4LC} - \frac{K_i^2}{16C^2}}$$

$$\beta = \frac{L|K_i| - 2Cr}{4LC}$$

$$q_p = \sigma_q e^{\beta t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\sigma_I}{c_1} \sin(\omega t) \right)$$

$$I_p = \sigma_q e^{\beta t} \beta \cos(\omega t) + \sigma_q e^{\beta t} \beta \frac{\sigma_I}{c_1} \sin(\omega t) - \sigma_q e^{\beta t} \sin(\omega t) \omega + \sigma_q e^{\beta t} \frac{\sigma_I}{c_1} \cos(\omega t) \omega$$

$$\sigma_q e^{\beta t} \left(\beta \cos(\omega t) \omega + \frac{\sigma_I}{c_1} \cos(\omega t) \omega \right) = \sigma_I; \quad t = 0$$

$$\sigma_q \beta + \frac{\sigma_I \sigma_q \omega}{c_1} = \sigma_I$$

$$c_1 = \frac{\sigma_I \sigma_q \omega}{\sigma_I - \sigma_q \beta}$$

$$q_p = \sigma_q e^{\beta t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\sigma_I - \sigma_q \beta}{\sigma_q \omega} \sin(\omega t) \right)$$

$$I_p = \sigma_q e^{\beta t} \left(\underbrace{\beta \cos(\omega t) + \frac{\sigma_I - \sigma_q \beta}{\sigma_q} \cos(\omega t)}_{\frac{\sigma_I}{\sigma_q} \cos(\omega t)} + \underbrace{\frac{\beta \sigma_I - \sigma_q \beta}{\omega \sigma_q} \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega t)}_{\frac{\beta \sigma_I - (\omega^2 + \beta^2) \sigma_q}{\omega \sigma_q} \sin(\omega t)} \right)$$

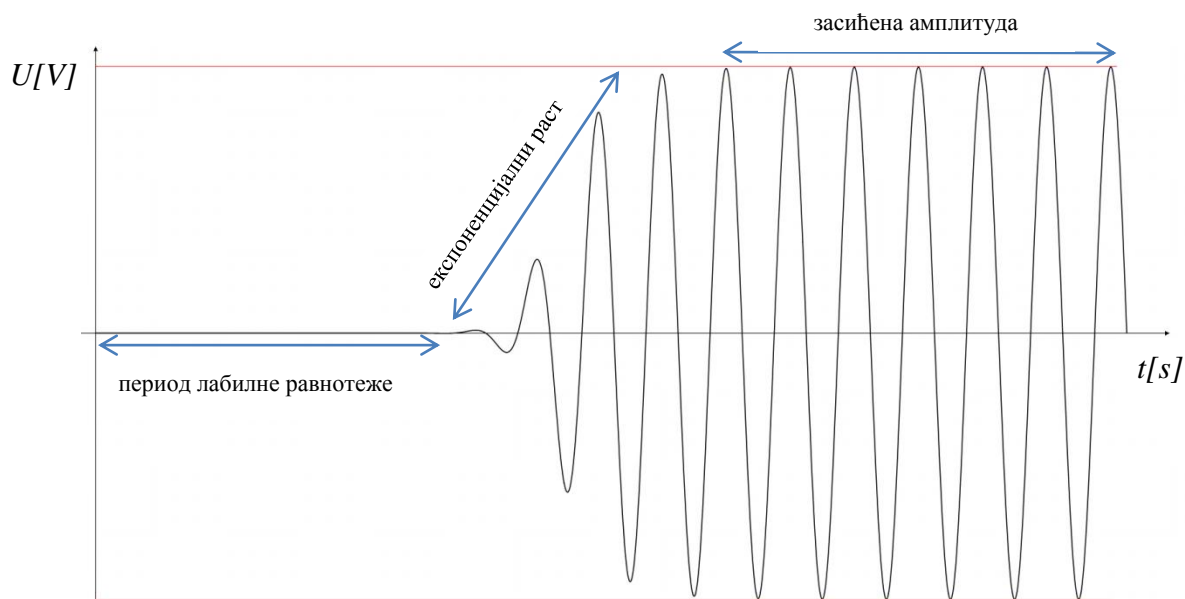
$$I_p = e^{\beta t} \left(\sigma_I \left(\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right) - \frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega} \sigma_q \sin(\omega t) \right)$$

$$I'_p = e^{\beta t} \left(\beta \sigma_I \left(\cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right) - \frac{\beta(\omega^2 + \beta^2)}{\omega} \sigma_q \sin(\omega t) \right. \\ \left. - \sigma_I (\sin(\omega t) \omega - \beta \cos(\omega t)) - (\omega^2 + \beta^2) \sigma_q \cos(\omega t) \right)$$

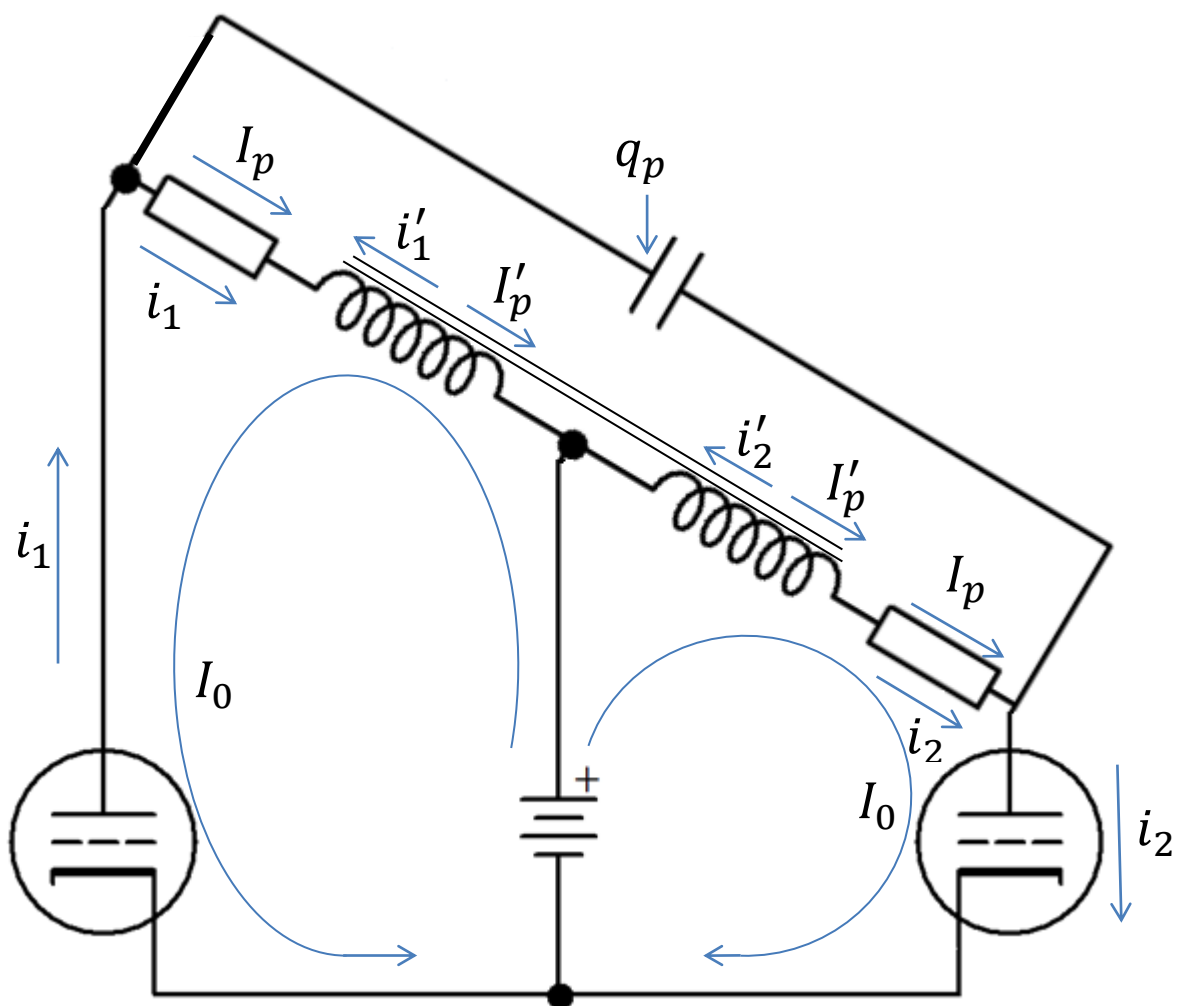
$$I'_p = e^{\beta t} \left(\sigma_I \left(2\beta \cos(\omega t) + \frac{\beta^2 - \omega^2}{\omega} \sin(\omega t) \right) - \frac{\omega^2 + \beta^2}{\omega} \sigma_q (\beta \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t)) \right)$$

У почетном тренутку се систем налази у лабилној равнотежи, па је математичко очекивање наелектрисања и струје једнако нули. Време које осцилатор проведе у лабилној равнотежи се израчунава квантовањем. Након експоненцијалног раста амплитуде, осцилатор пребацује активни елемент у колу у нелинеарно, засићено подручје рада и амплитуда престаје да расте. Напон коначне амплитуде зависи само од карактеристика активног елемента и термогеног отпора, а приближно је једнак напону једносмерног извора струје.

Као код непериодичног пражењења, и овде може на исти начин доћи до непериодичног пуњења кондензатора са вероватноћом поларизације 0.5 код симетричног кола. Амплитуда ће поново, због карактеристика активног елемента бити приближне вредности напона једносмерног извора струје и приближаваће му се асимптотски по протоку времена.



Прелазни процес рада осцилатора до достизања стационарног стања



Шема протока струја кроз осцилаторно коло

Квантовање линијског хармонијског осцилатора са позитивном повратном спрегом

Главна разлика између квантног линијског хармонијског осцилатора и класичног макро осцилатора јесте у томе што квантни хармонијски осцилатор може поседовати само дискретне вредности енергија распоређених по нивоима, док је енергија сваког макро осцилатора непрекидна физичка величина. У случају да на квантни осцилатор делују спољни утицаји, у овом случају повратна спрега, то ће првенствено привидно приближити два суседна енергетска нивоа у случају када честица жели да пређе са нижег нивоа на виши и истовремено удаљити два суседна нивоа у случају када честица жели да пређе са вишег нивоа на нижи, док термогени отпор кола има супротан ефекат тзв. ефекат пертурбације.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = -\frac{\hbar^2}{2L} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi(q, t) - \frac{1}{2C} q^2 \Psi(q, t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} i; \quad \frac{1}{C} = -L\omega^2$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = -\frac{\hbar^2}{2L} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi(q, t) + \frac{L\omega^2}{2} q^2 \Psi(q, t)$$

$$\Psi(q, t) = \Psi_q(q) \Psi_t(t)$$

$$i\hbar \Psi_q(q) \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(t) = -\frac{\hbar^2}{2L} \Psi_t(t) \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi_q(q) + \frac{L\omega^2}{2} q^2 \Psi_q(q) \Psi_t(t)$$

$$i\hbar \frac{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(t)}{\Psi_t(t)} = -\frac{\hbar^2}{2L} \frac{\frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi_q(q)}{\Psi_q(q)} + \frac{L\omega^2}{2} q^2 = E$$

$$E \Psi_q(q) = -\frac{\hbar^2}{2L} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \Psi_q(q) + \frac{L\omega^2}{2} q^2 \Psi_q(q)$$

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} \xi$$

$$E \Psi_q(q) = -\frac{\hbar^2}{2L} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial \Psi_q(q)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial q} \right) + \frac{\omega \hbar}{2} \xi^2 \Psi_q(q)$$

$$E\Psi_q(q) = -\frac{\omega\hbar}{2}\frac{\partial^2\Psi_q(q)}{\partial\xi^2} + \frac{\omega\hbar}{2}\xi^2\Psi_q(q)$$

$$-\frac{\partial^2\Psi_q(q)}{\partial\xi^2} + \xi^2\Psi_q(q) = \frac{2E}{\omega\hbar}\Psi_q(q)$$

$$k = \frac{2E}{\omega\hbar}$$

$$\frac{\partial^2\Psi_q(q)}{\partial\xi^2} = (\xi^2 - k)\Psi_q(q)$$

$$\xi \gg k \Rightarrow \frac{\partial^2\Psi_q(q)}{\partial\xi^2} = \xi^2\Psi_q(q); \Psi_q(q) = Ae^{-\frac{\xi^2}{2}} + B\underbrace{e^{\frac{\xi^2}{2}}}_{\infty}; B = 0$$

$$\Psi_q(q) = Ah(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2\Psi_q(q)}{\partial\xi^2} = Ae^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(\frac{\partial^2h(\xi)}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial h(\xi)}{\partial\xi} + h(\xi)(\xi^2 - 1)\right) = (\xi^2 - k)Ah(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2h(\xi)}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial h(\xi)}{\partial\xi}\xi + h(\xi)(k - 1) = 0$$

$$h(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j$$

$$\frac{\partial h(\xi)}{\partial\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} ja_j \xi^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)a_{j+1} \xi^j$$

$$\frac{\partial^2 h(\xi)}{\partial\xi^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)a_j \xi^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} j(j+1)a_{j+1} \xi^{j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2)a_{j+2} \xi^j$$

$$\xi^2 = \frac{a_j(j-1)j}{a_{j+2}(j+1)(j+2)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)a_j \xi^{j-2} - 2\sum_{j=0}^{\infty} ja_j \xi^j + (k-1)\sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j = 0$$

$$j(j-1) - 2j\xi^2 + (k-1)\xi^2 = 0$$

$$\xi^2 = \frac{j(j-1)}{1+2j-k} = \frac{a_j(j-1)j}{a_{j+2}(j+1)(j+2)}$$

$$a_{j+2} = \frac{a_j(1+2j-k)}{(j+1)(j+2)}$$

$$a_{j_{max}+2} = \frac{a_{j_{max}}(1 + 2j_{max} - k)}{(j_{max} + 1)(j_{max} + 2)} = 0$$

$$j_{max} = n; 1 + 2n - k = 0$$

$$\frac{2E}{\omega\hbar} = 1 + 2n; E = \left(\frac{1}{2} + n\right)\omega\hbar; n = \frac{k-1}{2}$$

$$a_{j+2} = -\frac{2(n-j)}{(j+1)(j+2)}a_j; h(\xi) = H_n(\xi)$$

$$\Psi_q(q) = AH_n(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 H_n^2(\xi)e^{-\xi^2} dq = 1$$

$$dq = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 H_n^2(\xi)e^{-\xi^2} \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} d\xi = 1$$

$$A = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(\xi)e^{-\xi^2} d\xi}{\sqrt{\pi}2^n n!}}}$$

$$A = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}$$

$$\Psi_q(q) = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{L\omega}{\hbar}} q\right) e^{-\frac{L\omega q^2}{2\hbar}}$$

Користећи својство $\xi H_{n\pm k}(\xi) = \sqrt{\frac{n\pm k+1}{2}} H_{n\pm k+1}(\xi) + \sqrt{\frac{n\pm k}{2}} H_{n\pm k-1}(\xi)$,

математичко очекивање преласка наелектрисања на суседне нивое без ефекта пертурбације ће бити:

$$\begin{aligned}
E_{n \rightarrow n+1}(q) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(q) \psi_{n+1}(q) q dq \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(q) \psi_{n+1}(q) dq \\
&\quad + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} \sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(q) \psi_{n+1}(q) dq}_0 \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n+1}(q) \psi_{n+1}(q) dq}_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} \sqrt{\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$

Аналогно томе, очекивање преласка са вишег на нижи ниво је:

$$E_{n \rightarrow n-1}(q) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega}} \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Пошто је математичко очекивање наелектрисања и струје, односно први моменат наелектрисања и струје једнак нули, онда је и дисперзија струје и наелектрисања једнака другом моменту.

$$D(q) = E(q^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(q) q^2 dq = \frac{\hbar}{L\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(q) \xi^2 dq = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{L\omega}$$

$$\sigma_q = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{L\omega}}$$

$$D(\xi) = n + \frac{1}{2}$$

$$D(LI) = E((LI)^2) = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(q) \frac{\partial^2 \psi_n(q)}{\partial \xi^2} dq = \hbar^2 \left((2n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \right) \frac{L\omega}{\hbar}$$

$$D(LI) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar L\omega \Rightarrow D(I) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega}{L}$$

$$\sigma_I = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega}{L}}$$

$$\sigma_q \sigma_I \geq \frac{\hbar}{2L}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t(t) = E \Psi_t(t)$$

$$\Psi_t(t) = B e^{-\frac{E}{\hbar} i t}$$

Приликом додавања временске зависности наелектрисања ће се организовати у облику таласног пакета распоређеног по нивоима.

$$\psi(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \Psi_n(q) e^{-\frac{E}{\hbar} i t} = e^{-\frac{1}{2} \omega i t} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \Psi_n(q) e^{-n \omega i t}$$

$$\psi(q, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \Psi_n(q) = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{L\omega(q-q_0)^2}{2\hbar}}$$

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n(q) \psi(q, 0) dq = \frac{A_n}{\sqrt[4]{\frac{\pi L\omega}{\hbar}}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\xi_0)^2} d\xi$$

Коришћењем једнакости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 + 2s\xi} e^{-(\xi^2 - \xi\xi_0 + \frac{1}{2}\xi_0^2)} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\xi_0)^2} d\xi$$

и

$$e^{s\xi_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s\xi_0)^n}{n!}$$

где је $A_n = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}$, следи:

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \frac{\xi_0^n e^{-\frac{1}{4}\xi_0^2}}{2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\xi_0^n e^{-\frac{1}{4}\xi_0^2}}{\sqrt{2^n n!}}$$

$$\psi(q, t) = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi_0^2 - \frac{1}{2}\omega i t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\xi_0 e^{-\omega i t}\right)^n}{n!} H_n(\xi)$$

$$\psi(q, t) = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi_0^2 - \frac{1}{2}\omega i t - \frac{1}{4}\xi_0^2 e^{-2\omega i t} + \xi\xi_0 e^{-\omega i t}}$$

$$\psi(q, t) = \sqrt[4]{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} e^{-\left(\frac{1}{2}(\xi - \xi_0 \cos(\omega t))^2 + i\left(\frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{4}\xi_0^2 \sin(2\omega t) + \xi\xi_0 \sin(\omega t)\right)\right)}$$

па је густина вероватноће положаја наелектрисања непертурбованог осцилатора:

$$|\psi(q, t)|^2 = \sqrt{\frac{L\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{L\omega(q-q_0\cos(\omega t))^2}{\hbar}}$$

Пошто на осцилатор делује сила која је контролисана повратном спрегом, са фреквенцијом самог осцилатора, долази до пертурбације квадратне зависности. За одређивање енергија пертурбованог осцилатора, као и за остале системе, у пракси је довољно рачунати апроксимацију првог и другог реда, под условом да енергија конвергира, иначе кретање неће бити осцилаторно.

$$E_n \approx E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots$$

$$E_n^{(1)} = \int_{\tau} \psi_n^{(0)*} H' \psi_n^{(0)} d\tau = H'_{nn}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_k c_{kn}^{(1)} H'_{nk} = \sum_{k \neq n} \frac{H'_{kn} H'_{nk}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \sum_{k \neq n} \frac{|H'_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

$$H = \frac{LI^2}{2} + \frac{L\omega^2 q^2}{2} - Kq^2 \quad q = \frac{2Ci}{K_i} \quad Kq^2 = \frac{Li^2}{2} \Rightarrow K = \frac{LK_i^2}{8C^2}$$

$$q_{nk} = q_{kn} = \sqrt{\frac{\hbar}{2L\omega}} (\sqrt{n+1}\delta_{n+1,k} + \sqrt{n}\delta_{n-1,k})$$

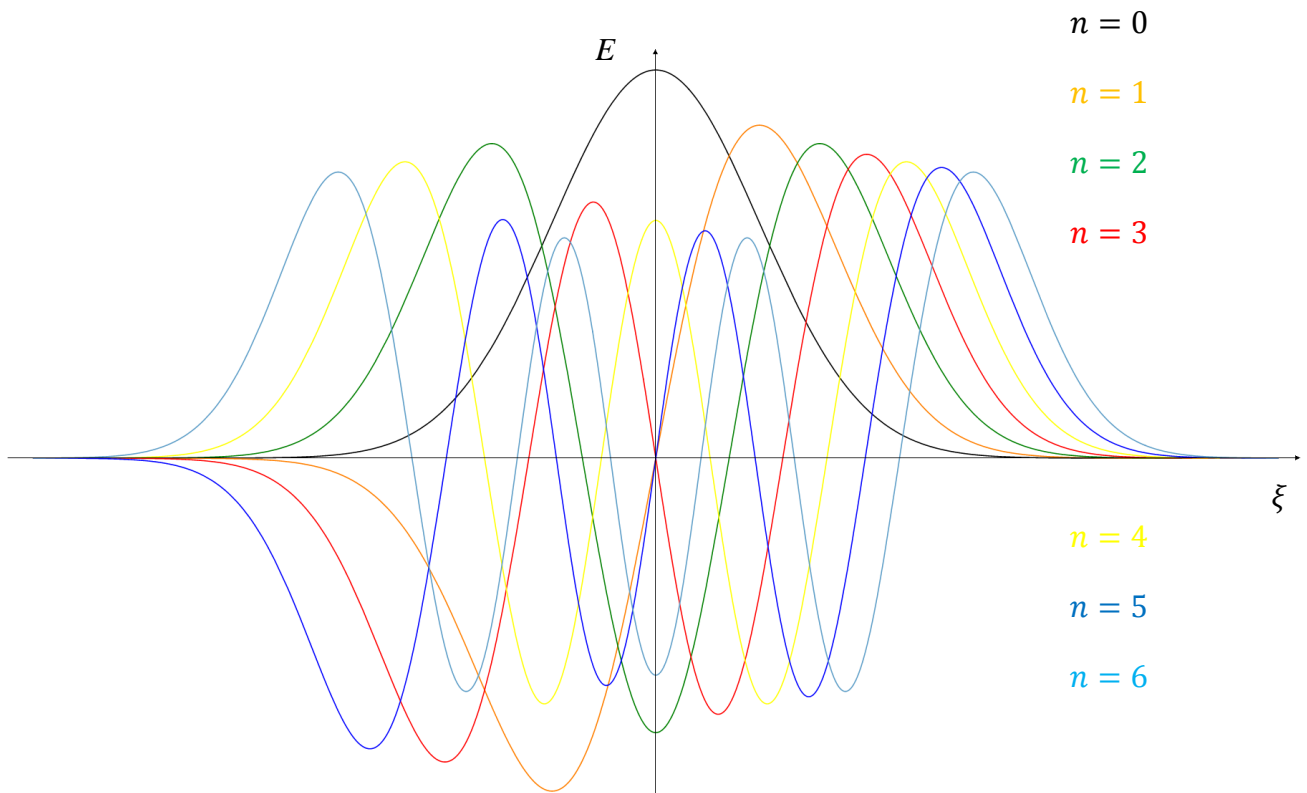
$$\begin{aligned} (q_{nk})^2 &= (q_{kn})^2 = q_{nl}q_{lk} \\ &= \frac{\hbar}{2L\omega} \left(\frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{l+1}\delta_{l+1,k} + \sqrt{l}\delta_{l-1,k})}{(l=n+1)} + \frac{\sqrt{n}(\sqrt{l+1}\delta_{l+1,k} + \sqrt{l}\delta_{l-1,k})}{(l=n-1)} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2L\omega} (\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{n+2,k} + (2n+1)\delta_{n,k} + \sqrt{n(n-1)}\delta_{n-2,k}) \end{aligned}$$

$$E_n^{(1)} = -K \frac{\hbar}{2L\omega} (2n+1) = -\frac{\hbar K_i^2}{8\omega C^2} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

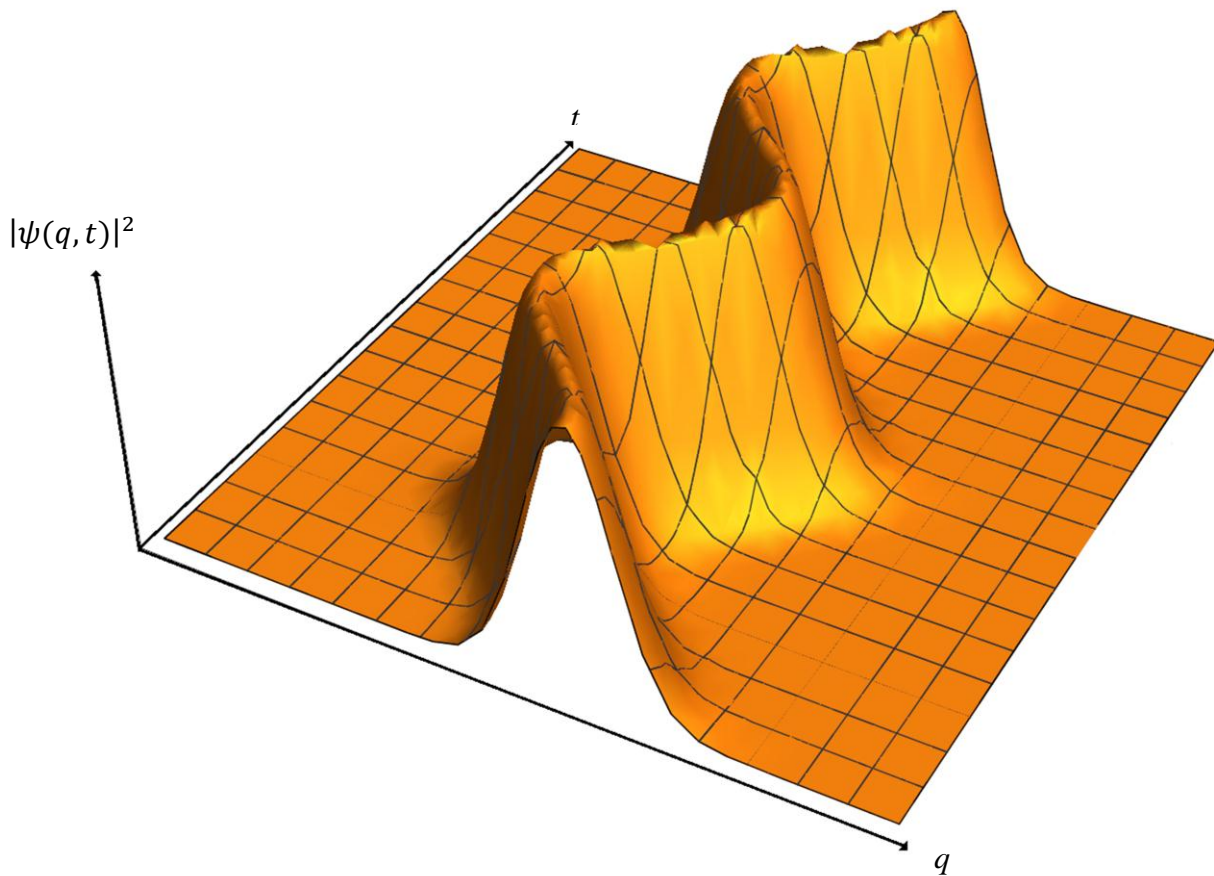
$$E_n^{(2)} = K^2 \left(\frac{\hbar}{2L\omega} \right)^2 \left(\frac{(n+1)(n+2)}{-2\omega\hbar} + \frac{n(n-1)}{2\omega\hbar} \right) = -\frac{\hbar K_i^4}{128\omega^3 C^4} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$E_n \approx \left(\omega\hbar - \frac{\hbar K_i^2}{8\omega C^2} - \frac{\hbar K_i^4}{128\omega^3 C^4} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Ово је апроксимација апроксимације осцилатора пошто је за прави модел потребно урачунати отпор калема који ће као и активни елемент мењати временску густину вероватноће преласка са нивоа на ниво, као и механичка и електростатичка својства електрона.



Таласни пакет наелектрисиња распоређеног по нивоима

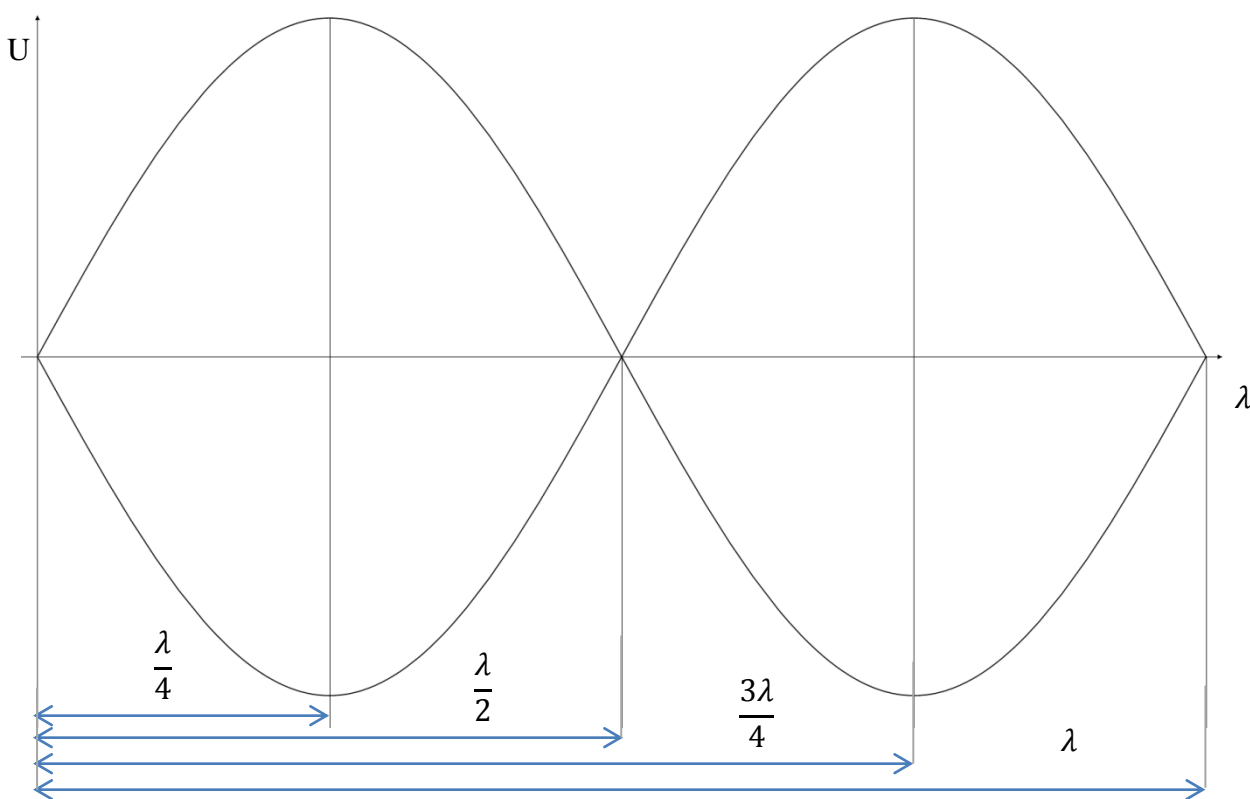


Густина вероватноће налажења наелектрисиња у простору и времену непетурбованог осцилатора

Ослобађање енергије у виду електромагнетног зрачења

У складу са Максвеловом теоријом, свако променљиво магнетно поље узрокује настанак електричног и свако променљиво електрично, настанак магнетног. Дакле, осцилатор око себе стварајући променљива поља, зрачи део енергије у виду електромагнетних таласа.

Ова појава је нашла примену у телекомуникацијама. Предајници шаљу ове таласе у атмосферу, а пријемници их хватају, појачавају и касније репродукују. Цео систем функционише по принципу слагања таласа унутар пријемника или предајника у виду стојећег таласа. Чворови таласа се уземљују, а сигнал циркулише преко трбуха.



Стојећи талас у предајнику или пријемнику

Стојећи талас се формира у проводнику чија дужина обухвата цео број хармоника.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}}$$

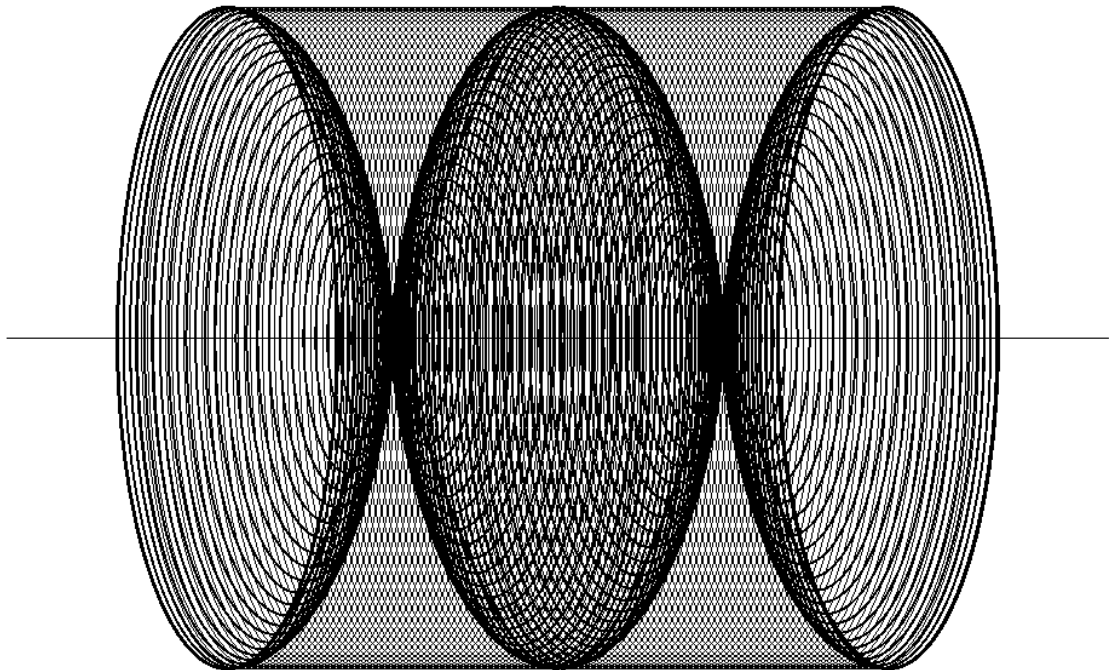
$$\lambda = \frac{c}{v}$$

$$l = n \frac{\lambda}{2}$$

Брзина електромагнетног таласа у проводнику једнака је брзини светлости у проводнику и зависи од релативне диелектричне константе и релативне магнетне пермеабилности проводника.

Међутим, ако се ови параметри покlope за својствени механички талас унутар језгра калема, могуће је створити и механички стојећи талас. Код калема са гасовитим језгром брзина звука у језгру је функција притиска, густине и експонента адијабате гаса од ког је састављен.

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

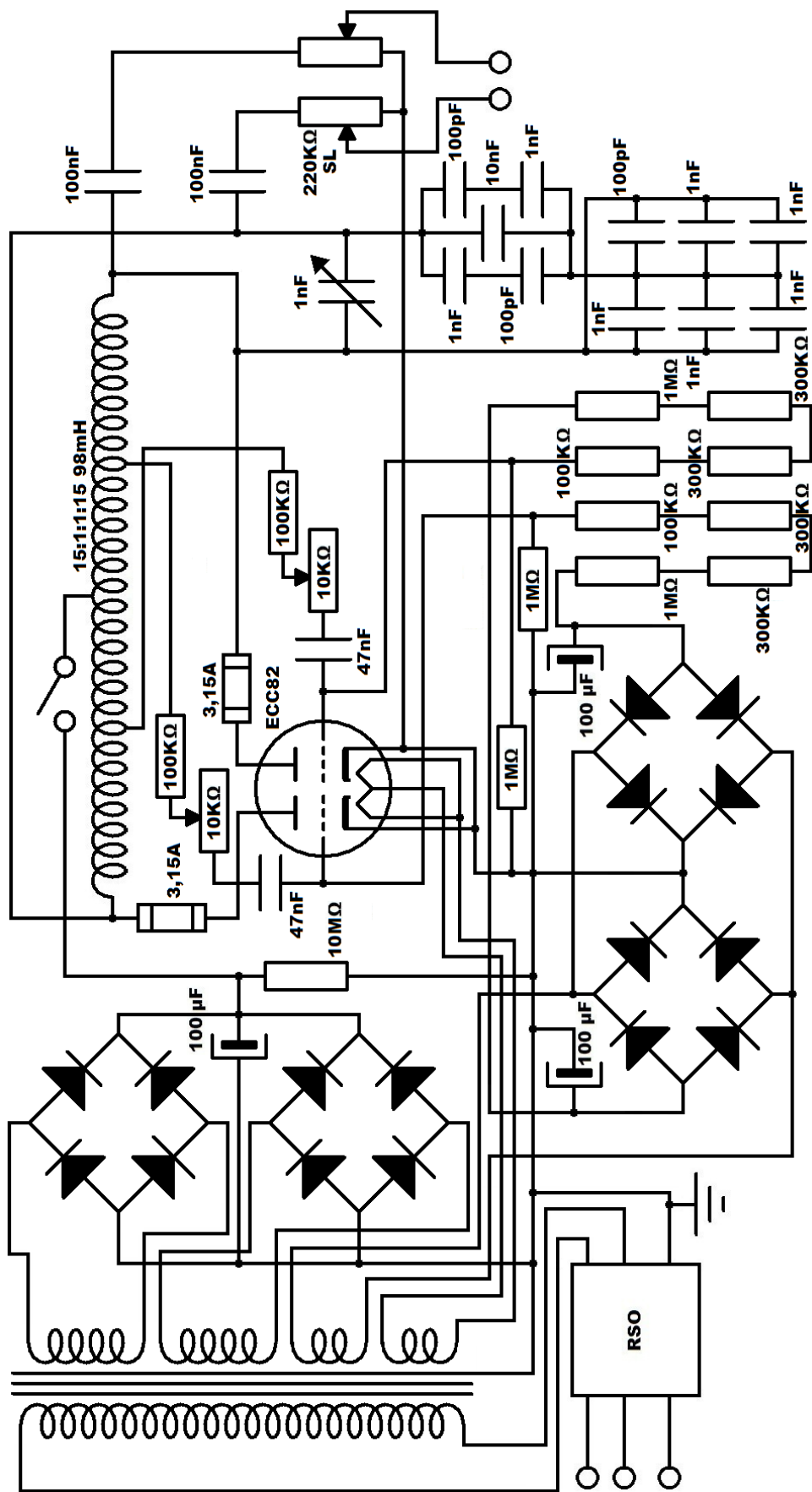


Стојећи механички талас унутар језгра калема

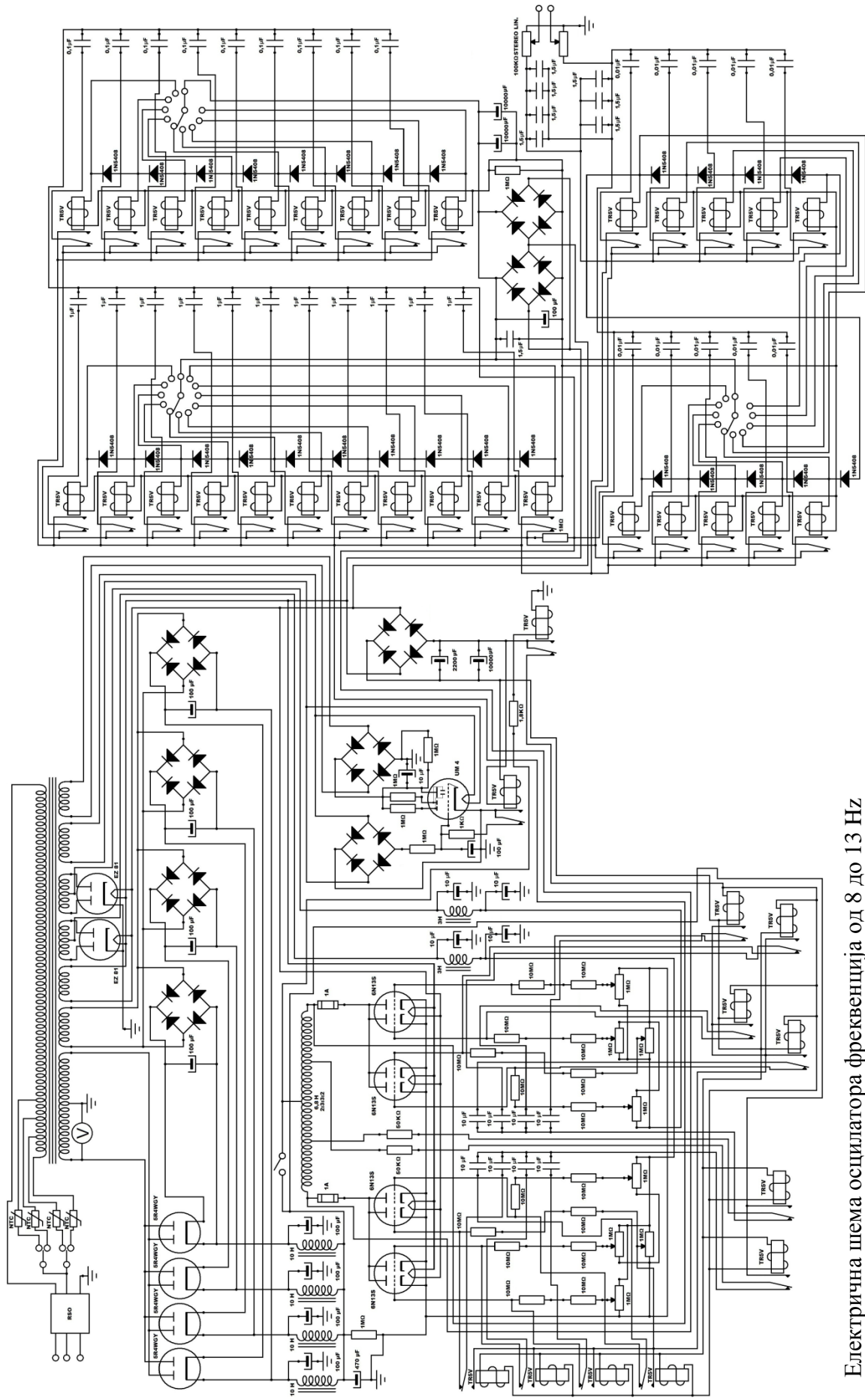
Закључак

Полазећи од најситнијих чинилаца света око нас, од електрона, атома и молекула па до највећих система у свемиру, посматрајући развој технике од калкулатора до сложених рачунарских система, мобилних телефона, телевизије, па и саме анатомије човека, осцилатоно кретање одржава свет материјалним, видљивим и опипљивим и издваја га из уједначености времена и просторне празнине.

Прилози



Електрична шема осцилатора фреквенције 4 kHz



Електрична шема осцилатора фреквенција од 8 до 13 Hz

Литература

Ивановић М. Д.: Квантна механика, Научна књига, Београд, 1974.

Метзгер Б. и сарадници: Радио приручник за аматере и техничаре, Београд, 1985.

Шиф И. Л.: Quantum mechanics, Stanford University, 1968.